



universität
wien

DIPLOMARBEIT / DIPLOMA THESIS

Titel der Diplomarbeit / Title of the Diploma Thesis

„Die Vektorrechnung als Stoffgebiet in der
österreichischen AHS“

verfasst von / submitted by
Sonja Mayrhofer

angestrebter akademischer Grad / in partial fulfilment of the requirements for the degree of
Magistra der Naturwissenschaften (Mag. rer. nat.)

Wien, 2016 / Vienna, 2016

Studienkennzahl lt. Studienblatt /
degree programme code as it appears on
the student record sheet:

A 190 344 406

Studienrichtung lt. Studienblatt /
degree programme as it appears on
the student record sheet:

Lehramtsstudium UF Englisch
UF Mathematik

Betreut von / Supervisor:

ao.Univ.-Prof. Dr. Günther Hörmann

Mitbetreut von/Co-Supervisor:

Mag. Dr. Andreas Ulovec

Danksagung

Ich möchte mich an dieser Stelle in erster Linie bei meinen Eltern, Gerlinde und Helmut, bedanken, die mir dieses Studium ermöglicht haben und stets ein offenes Ohr für meine Sorgen hatten.

Des Weiteren möchte ich hier auch meinen Dank an meinen Vater und Daniela Gamperl aussprechen, einerseits dafür, dass sie diese Arbeit Korrektur gelesen haben, und andererseits dafür, dass sie mir während des ganzen Studiums mit Rat und Tat zur Seite gestanden sind und mich immer unterstützt haben.

Ganz besonders gilt mein Dank meinem Freund, Michael Schafner, der immer für mich da war, gemeinsam mit mir durch diese schöne, aber teilweise auch sehr schwierige Zeit gegangen ist, mich immer aufgemuntert und mit mir gelacht und geweint hat. Gemeinsam haben wir dieses Studium bewältigt und einander Halt geben und unterstützen können, wenn es notwendig war.

Abschließend möchte ich hier insbesondere zwei Lehrpersonen der Universität Wien danken, die mir das Leben schon während des Studiums, aber vor allem auch im Hinblick auf diese Abschlussarbeit um so vieles leichter gemacht haben: Günther Hörmann und Andreas Ulovec. Vielen, vielen Dank für die kurzfristige, aber sehr rasche Übernahme der Betreuung und die große Unterstützung, das Verständnis und das Vertrauen! Ich schätze es sehr und möchte es an dieser Stelle betonen, dass beide mit viel Herz und Energie an die Studierenden herantreten und ihnen immer helfen. Ohne diese beiden wäre der schnelle und erfolgreiche Abschluss dieser Arbeit wahrscheinlich nicht möglich gewesen.

Abstract in Deutsch

Die Vektorrechnung ist ein Stoffgebiet des Mathematikunterrichts der Sekundarstufe II der österreichischen AHS, das erst 1967 in den Lehrplan aufgenommen wurde. Im Laufe der letzten fünfzig Jahre haben sich die Lehrplanforderungen und die Darstellung der Vektorrechnung in den Schulbüchern gewandelt. Insbesondere durch die Einführung der standardisierten Reifeprüfung und den Einsatz neuer elektronischer Hilfsmittel werden einzelne Aspekte der Vektorrechnung stärker betont, während viele andere in den Hintergrund rücken. Des Weiteren zeigt sich in den aktuellen österreichischen Schulbüchern eine Veränderung der Aufgabenkultur im Hinblick auf die Formate der standardisierten Reifeprüfung.

Abstract in English

Vector analysis as a field of mathematics at upper secondary schools in Austria has only been introduced in the curricula for upper secondary schools in 1967. During the last fifty years, vector analysis has gone through substantial change, as regards its inclusion and description in the curricula, its structure and organisation in school books and the use of new electronic devices. In particular as a result of the introduction of the written standardised matriculation examination (“Reifeprüfung”) some aspects have received more attention whereas others have not. Furthermore, the analysis of recent school books depicts a change concerning the formats of tasks with respect to those required as part of the standardised matriculation examination (“Reifeprüfung”).

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Kurzer Überblick über die Geschichte der Vektorrechnung	3
2.1	Vorformen der Vektorrechnung	3
2.2	Verschiedene Ansätze zur Entwicklung vektorieller Systeme.....	4
2.2.1	Caspar Wessel, August Möbius und Giusto Bellavitis	4
2.2.2	William Rowan Hamilton (1805-1865).....	5
2.2.3	Hermann Günther Graßmann (1809-1877)	6
2.3	Die Entstehung der modernen Vektorrechnung	7
3	Vom Lehrplan 1967 bis zu den Grundkompetenzen der standardisierten Reifeprüfung ...	9
3.1	Der Lehrplan von 1967	10
3.2	Der Lehrplan von 1978	13
3.3	Der Lehrplan von 1989	15
3.4	Der Lehrplan von 2004	18
3.5	Die Grundkompetenzen für die zentrale Reifeprüfung	20
4	Verschiedene Vektormodelle	22
4.1	Das Pfeilklassenmodell.....	22
4.1.1	Literatur und Studien.....	22
4.1.2	Beispiele aus Schulbüchern.....	25
4.2	Das Modell der Ortsvektoren	27
4.2.1	Allgemeines.....	27
4.2.2	Beispiele aus Schulbüchern.....	30
4.3	Das Translationsmodell	31
4.3.1	Allgemeines.....	31
4.3.2	Beispiele aus Schulbüchern.....	32
4.4	Das algebraische Modell und dessen geometrische Deutung.....	32
4.4.1	Literatur und Studien.....	32
4.4.2	Beispiele aus Schulbüchern.....	39

5	Die Vektorrechnung in aktuellen Schulbüchern in Hinblick auf die Grundkompetenzen für die zentrale Reifeprüfung	41
5.1	Vektoren als Zahlentupel – AG 3.1	41
5.2	Geometrische Deutung von Vektoren – AG 3.2	45
5.3	Rechenoperationen mit Vektoren – AG 3.3	49
5.3.1	Addition von Vektoren	49
5.3.2	Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar	58
5.3.3	Skalarprodukt von Vektoren	65
5.4	Geraden im $\mathbb{R}^2$ (und im $\mathbb{R}^3$) – AG 3.4	74
5.4.1	Parameterdarstellung von Geraden im $\mathbb{R}^2$ (und im $\mathbb{R}^3$)	75
5.4.2	Normalvektordarstellung von Geraden im $\mathbb{R}^2$	84
5.4.3	Lagebeziehungen bestimmen und Schnittpunkte ermitteln	92
5.5	Normalvektoren im $\mathbb{R}^2$ – AG 3.5	99
6	Technologieeinsatz im Hinblick auf die schriftliche standardisierte Reifeprüfung am Beispiel von GeoGebra und TI-Nspire	106
6.1	Vektoren als Zahlentupel – AG 3.1	107
6.2	Geometrische Deutung von Vektoren – AG 3.2	108
6.3	Rechenoperationen – AG 3.3	110
6.4	Geraden im $\mathbb{R}^2$ (und im $\mathbb{R}^3$) – AG 3.4	114
6.5	Normalvektoren im $\mathbb{R}^2$ – AG 3.5	119
7	Zusammenfassung und Ausblick	121
8	Bibliographie	124
8.1	Literatur	124
8.2	Lehrpläne	125
8.3	Schulbücher	126
9	Abbildungsverzeichnis	128

1 Einleitung

Für Lehramtsstudenten und Lehramtsstudentinnen wie mich ist es ohne Zweifel gewinnbringend sich im Zuge der Diplomarbeit mit einem fachdidaktischen Thema auseinander zu setzen, da der zukünftige LehrerInnenalltag durch diese geprägt sein wird. Dementsprechend entschied ich mich bei der Themenfindung für meine Arbeit einerseits für ein Thema, welches ich als Schülerin selbst gerne gehabt hatte, andererseits für eines, über welches ich als zukünftige Lehrerin noch mehr erfahren wollte, um es anschließend den SchülerInnen möglichst gut und anschaulich präsentieren und mit ihnen erarbeiten zu können.

Die Vektorrechnung birgt in dieser Hinsicht einen besonderen Reiz für mich, da sie im Bereich der Analytischen Geometrie eine bedeutsame Verbindung zwischen der Algebra und der Geometrie herstellt. Schon Malle (2005b: 8) betont: „Vektoren sind heute aus der Analytischen Geometrie der Schule nicht mehr wegzudenken.“ Dabei fasziniert mich vor allem die Frage, wieso die Vektorrechnung in der Schule im Laufe der Zeit so viel an Bedeutung gewonnen hat, obwohl sie doch erst relativ spät, in den 1960er Jahren, in den Lehrplan (LP 1967) aufgenommen worden ist. Nicht überraschend liegt die Antwort vor allem in den Anwendungsmöglichkeiten der Vektorrechnung. Malle (2005a: 4) schreibt dazu: „Viele Situationen im Alltag können nicht durch eine einzige Zahl beschrieben werden, sondern man braucht dazu zwei oder drei Zahlen.“ Meines Erachtens ist die Anwendungsorientierung im Mathematikunterricht einer der essenziellsten Aspekte, da diese die SchülerInnen inspiriert, motiviert und interessiert.

Obwohl die Vektorrechnung jedoch eindeutig eines der wesentlichen Inhalte des Mathematikunterrichts ist, scheint es dennoch viele Uneinigkeiten und unterschiedliche Interpretationen des Vektorbegriffs zu geben. Schon vor mehr als dreißig Jahren schrieb Grosser (1982: 61), dass „die didaktische Rezeption des Vektorbegriffs noch nicht bis zu einem befriedigenden Punkt gediehen [ist].“ Dies begründet er insbesondere mit der „Mehrfachbelegung des Begriffs“ sowie mit „seiner historisch bedingten Vielschichtigkeit im Sinne der Anwendungen (innerhalb und außerhalb der Mathematik“ (Grosser 1982: 61). Dieses Zitat dient in gewisser Hinsicht als Grundlage für den Aufbau meiner Arbeit, da ich die Vektorrechnung sowohl diachronisch, also im Hinblick auf ihre Entstehung und Entwicklung, als auch synchronisch, im Bezug auf den derzeitigen Stand mit besonderem Augenmerk auf die standardisierte schriftliche Reifeprüfung in Mathematik, beleuchten werde, da beides in Zusammenhang miteinander steht. Die Vektorrechnung, so wie sie derzeit in Schulbüchern und im Unterricht behandelt wird, ist zu diesem Zeitpunkt besonders interessant, da im Vorjahr,

2015, zum ersten Mal die zentrale Reifeprüfung durchgeführt wurde. Wie sich im Laufe dieser Arbeit zeigen wird, hat es durch die Einführung der Zentralmatura und den dazugehörigen Grundkompetenzen sowie durch die Möglichkeiten mittels neuer elektronischer Hilfsmittel gravierende Änderungen gegeben. Insbesondere Lehramtsstudenten und Lehramtsstudentinnen in meinem Alter erleben dies aus einer besonderen Sichtweise mit, da man die Vektorrechnung als SchülerIn noch ganz anders erlebt hat, als man sie als LehrerIn dann unterrichten wird.

Um die hier beschriebenen Aspekte der Vektorrechnung im Hinblick auf die wesentlichen Veränderungen hinsichtlich der standardisierten schriftlichen Reifeprüfung detailliert zu beleuchten, zusammenzufassen, zu erörtern und zu diskutieren wird diese Arbeit folgendermaßen aufgebaut: Zu Beginn wird ein kurzer Überblick über die Geschichte der Entstehung und Entwicklung der Vektorrechnung geboten. Dabei werden verschiedene Ansätze und Konzepte betrachtet, die auf Grund unterschiedlicher Motivationen, beispielsweise physikalischer oder geometrischer Art, entwickelt worden sind. Diese sind fundamental in Bezug auf das Verständnis der Bedeutung der heutigen Vektorrechnung. Im nächsten Abschnitt wird die Vektorrechnung als Teil der Lehrpläne von 1967, 1978, 1989 und 2004 sowie der Grundkompetenzen für die zentrale Reifeprüfung vom BIFIE betrachtet. Hierbei soll erneut gezeigt werden, wie sich gewisse Aspekte der Vektorrechnung verändert haben, Inhalte in den Hintergrund gerückt sind und Teile der Vektorrechnung an Bedeutung gewonnen haben. Außerdem werden die Grundkompetenzen mit dem aktuellen Lehrplan von 2004 verglichen, um auch den Einfluss der Einführung der standardisierten Reifeprüfung auf den Schulstoff zu betonen, wobei zu bedenken ist, dass die Bedeutung und Funktion der Grundkompetenzen nicht mit dem Lehrplan vergleichbar sind. In Kapitel 4 wende ich mich der Frage zu, was ein Vektor denn eigentlich sei. Dabei werden verschiedene Vektormodelle betrachtet, die im Laufe der Zeit in Schulbüchern verwendet worden sind und deren Vor- und Nachteile erörtert. Im fünften Abschnitt werden insbesondere fünf Schulbücher im Hinblick auf die Grundkompetenzen für die zentrale Reifeprüfung inhaltlich analysiert und verglichen. Im Zuge dieser Analyse werden verschiedene Erklärungen, Definitionen, Musterbeispiele, Abbildungen und Übungsaufgaben näher beleuchtet und gegebenenfalls mit Beispielen vergangener zentraler Reifeprüfungstermine und dem BIFIE Aufgabenpool (BIFIE 2014) verglichen. Der letzte Teil beschäftigt sich mit der Anwendung neuer Technologien im Hinblick auf die Vektorrechnung im Zusammenhang mit den Forderungen an elektronische Hilfsmittel für die standardisierte schriftliche Reifeprüfung.

2 Kurzer Überblick über die Geschichte der Vektorrechnung

In diesem Kapitel wird ein kurzer Überblick über die Geschichte der Entstehung und Entwicklung der Vektorrechnung gegeben. Dabei wird auf verschiedene Ideen und Konzepte in physikalischer, geometrischer und algebraischer Hinsicht eingegangen. Ausführlichere Beschreibungen zu den hier vorgestellten Konzepten sind beispielsweise in Mäder (1992), Malle (1998) und Hartmann (1993) nachzulesen.

2.1 Vorformen der Vektorrechnung

Verschiedene Ideen, die als Vorreiter der Vektorrechnung betrachtet werden können, sind im Laufe der Geschichte zu finden, wie zum Beispiel das Konzept des Kräfteparallelogramms und dessen Verwendung (Malle 1998: 112). Die Idee des Kräfteparallelogramms stammt bereits aus der Antike und ist beispielsweise bei Aristoteles in einer seiner Schriften *problémata mechánica* zu finden (Mäder 1992: 114). Das Konzept der Zusammensetzung von „zwei Bewegungen, die jeweils mit konstanter Geschwindigkeit ablaufen“ (Mäder 1992: 114), taucht vor allem im 16. und 17. Jahrhundert in Schriften verschiedener bekannter Naturwissenschaftler auf, wie zum Beispiel Galileo Galilei, Isaac Newton und Simon Stevin (Mäder 1992: 114). Allerdings werden Geschwindigkeiten und Kräfte damals noch nicht in Vektorform beschrieben und deren Zusammensetzungen nicht als Vektoraddition berechnet und interpretiert; man kann also noch nicht von der Vektorrechnung im modernen Sinne sprechen (Malle 1998: 112).

Schon bald erkennt man, dass die Angabe eines einzelnen Betrags zur Beschreibung physikalischer und geometrischer Probleme oft nicht mehr ausreichen würde. Diesen Grundgedanken vertritt auch Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), der in einem Brief an den Physiker Christian Huygens (1629-1695) von der Notwendigkeit „eine[r] andere[n] Analysis“ schreibt, die „ausdrücklich geometrisch oder linear ist und die eine Lage direkt ausdrückt wie die Algebra einen Betrag ausdrückt“ (Malle 1998: 112). Leibniz kritisiert die damalige Algebra vor allem hinsichtlich fehlender Möglichkeiten, um „Lage, Winkel und Bewegung direkt aus[zudrücken]“ (Malle 1998: 113) und schafft die Vision der *Analysis situs*. Obwohl Leibniz seine Idee nicht detailliert und nur auf sehr komplizierte Art und Weise ausgearbeitet hat und selbst diese eher wenig mit der modernen Vektorrechnung im Zusammenhang steht, ist sie von großer Bedeutung, da sie als grundlegende Anregung für die Entwicklungen einer brauchbaren Vektorrechnung dient (Malle 1998: 113).

Im Jahre 1844 schreibt die Mathematikervereinigung *Fürstlich Jablonovskische Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig* einen Preis im Wert von 24 Dukaten in bar und

zusätzlich einer Goldmünze mit selbigen Wert aus. Die Aufgabe besteht darin, die Ideen von Leibniz aufzugreifen und ein Konzept zur Beschreibung von Lagen zu entwickeln, das für die Geometrie und die Physik brauchbar sein würde. Diesen Preis gewinnt Hermann Günther Graßmann aus Stettin mit seiner Schrift *Die geometrische Analyse*¹, welche die Entstehung der modernen Vektorrechnung begründet (Mäder 1992: 106).

2.2 Verschiedene Ansätze zur Entwicklung vektorieller Systeme

2.2.1 Caspar Wessel, August Möbius und Giusto Bellavitis

Auch Caspar Wessel (1745-1818) tritt mit geometrischem Fokus an die Entwicklung der Vektorrechnung heran. Dabei spielt die geometrische Deutung der komplexen Zahlen eine wichtige Rolle (Malle 1998: 113). Laut Malle (1998: 113) „deutet [Wessel] komplexe Zahlen in der bekannten Weise durch gerichtete Strecken, die vom Ursprung eines ebenen Koordinatensystems ausgehen“. Alle uns bekannten grundsätzlichen Rechenoperationen wie Addition, Subtraktion und Multiplikation zweier komplexer Zahlen und Multiplikation mit einem Skalar werden von Wessel nach heutigen Regeln definiert (Malle 1998: 113-114). Wessel versucht anschließend dieses Konzept der komplexen Zahlen sowie dessen geometrische Interpretation auf den Raum auszuweiten, bleibt aber laut Mäder (1992: 115) bei der Entwicklung einer eindeutigen Deutung der Multiplikation im $\mathbb{R}^3$ erfolglos.

Ein weiterer wichtiger Vertreter, der von manchen sogar als „Vater der Vektorrechnung“ (Mäder 1992: 118) bezeichnet wird, ist August Möbius (1790-1868). Die Ideen von Möbius gleichen denen Graßmanns schon um einiges mehr als die vorhergegangenen Konzepte. In seiner Schrift *Barycentrischen Calcul* (griech. auf den Schwerpunkt bezogen) beschäftigt sich Möbius mit der Entwicklung der Berechnung von einem Schwerpunkt im Raum (Malle 1998: 116). In der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts veröffentlicht Möbius schließlich die Schrift *Über die geometrische Addition und Multiplikation*. In dieser Schrift definiert Möbius zwei Arten der Multiplikation, nämlich die geometrische Multiplikation, welche das von zwei Vektoren aufgespannte Parallelogramm, also eine orientierte Fläche, aber nicht dessen Flächeninhalt beschreibt, und die projektive Multiplikation, welche dem heutigen Skalarprodukt entspricht. Hier ist eine eindeutige Anlehnung an die Ideen von Graßmann zu erkennen und sie ist von großer historischer Bedeutung (Mäder 1992: 118).

¹ Für Graßmanns Schriften siehe 2.2.3

Giusto Bellavitis (1803-1880) entwickelt als erster ein Konzept, das die Idee der Äquivalenzrelation für gerichtete Strecken beinhaltet. Er bezeichnet zwei gerichtete Strecken als äquipollent (lat. schiebungsgleich), wenn sie in ihrer Länge und Orientierung übereinstimmen und parallel sind (Malle 1998: 117). Diese können zur Bildung einer Summe aneinandergelegt werden (Mäder 1992: 118):

$$AB + BC + CD \simeq AD.$$

2.2.2 William Rowan Hamilton (1805-1865)

Die Person, die neben Graßmann vor allem zur Entstehung der Vektorrechnung beigetragen hat, ist William Rowan Hamilton. Als erster beschreibt er komplexe Zahlen als geordnete Zahlenpaare (Mäder 1992: 119). Er definiert wie Wessel die Addition, Subtraktion und Multiplikation zweier komplexer Zahlen so, wie wir es heute kennen. Auch Hamilton versucht folglich, sein Konzept auf den drei-dimensionalen Raum auszuweiten und scheitert, wie bereits Wessel, an der Definition der Multiplikation zweier Zahlentripel, die es, wie man heute weiß, nicht geben kann (Mäder 1992: 120). Jedoch betrachtet Hamilton nicht nur Zahlentripel, sondern auch Quaternionen, die aus einem reellen Teil und drei komplexen Teilen bestehen. Für Quaternionen der Form $a + bi + cj + dk$ mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ gelten laut Hamilton also folgende Relationen (Malle 1998: 115):

$$\begin{array}{lll} i^2 = j^2 = k^2 = -1 \\ ij = k & jk = i & ki = j \\ ji = -k & kj = -i & ik = -j \end{array}$$

Um also das Produkt zweier Quaternionen zu berechnen, multipliziert man wie üblich aus und folgt den oben beschriebenen Vorgaben. Alle anderen Rechenoperationen definiert Hamilton für die Quaternionen analog zu den Definitionen der komplexen Zahlen. Im Hinblick auf die Erfüllung aller anderen Rechengesetze, wie beispielsweise der Assoziativität und der Kommutativität, ist es wichtig zu betonen, dass die Multiplikation zweier Quaternionen nicht kommutativ ist (Malle 1998: 115). Die Faszination Hamiltons von seinem Konzept lässt sich vor allem auch durch die Idee, die Zeit als vierte Dimension neben dem Raum zu interpretieren, erklären (Mäder 1992: 121). Im Kontext der Quaternionen taucht auch zum ersten Mal der Begriff **Vektor** auf. Ist $\alpha = a + bi + cj + dk$, so wird a als der Skalarteil und $bi + cj + dk$ als Vektorteil bezeichnet (Malle 1998: 115).

2.2.3 Hermann Günther Graßmann (1809-1877)

Graßmann gilt als einer der bedeutendsten Begründer der Vektorrechnung, obwohl seine Ideen zu seiner Zeit nicht anerkannt worden sind. In vier Schriften hat Graßmann seine Konzepte der Vektorrechnung zum Ausdruck gebracht und veröffentlicht (Mäder 1992: 107). Die erste Schrift, *Theorie der Ebbe und Flut* (1840), beinhaltet völlig neue Begriffe und Methoden (Mäder 1992: 107). Beispielsweise definiert Graßmann die geometrische Gleichheit zweier Strecken durch die Gleichheit ihrer Richtung und ihres Betrags und verwendet dafür dieses Symbol: $\doteq$ (Malle 1998: 117). Auch die Addition führt Graßmann auf geometrischer Basis ein, welche auf die Parallelogrammregel zurückgeführt werden kann und mit folgendem Symbol gekennzeichnet wird: $\dot{+}$ (Malle 1998: 117). Die anderen Rechenoperationen wie die Subtraktion und die Multiplikation mit einem Skalar „fließen mehr oder weniger selbstverständlich ein“ (Malle 1998: 117). Die zwei Arten der Multiplikation zweier gerichteter Strecken sind das lineare Produkt, welches dem uns bekannten Skalarprodukt entspricht und das geometrische Produkt, welches dem Flächeninhalt des von zwei gerichteten Strecken aufgespannten Parallelogramm entspricht (Malle 1998: 118).

Auch seine zweite Schrift *Die lineale Ausdehnungslehre, ein neuer Zweig der Mathematik* (1844) bleibt eher erfolglos und wird nicht angesehen. Eine Anstellung an der Universität, die er durch diese Schrift erreichen wollte, wird Graßmann verwehrt (Mäder 1992: 111). Sein Misserfolg scheint auf die schwere Lesbarkeit der Werke zurückzuführen zu sein, da der philosophische Kontext in dem Graßmanns Arbeit zu sehen ist, für die Menschen damals nur schwer zugänglich war (Malle 1998: 117). Laut Malle (1998: 117) sei „diese philosophische Verpackung notwendig, weil es sonst G[raßmann] mit den Mitteln seiner Zeit nicht möglich gewesen wäre, seine sehr abstrakten Ideen auszudrücken.“

Weitere Beiträge Graßmanns zur Vektorrechnung sind in seiner Ausweitung seiner Konzepte in die n-dimensionale Geometrie zu finden (Malle 1998: 118). Dies ist möglich durch Graßmanns Idee des Stufenprozesses, den Ausdehnungsgrößen durchlaufen:

Ausgangspunkte sind dabei die sog. Elementargrößen, die GRASSMANN nicht näher definiert, doch meist als Punkte deutet. Durch die Bewegung eines Punktes entsteht eine Ausdehnungsgröße erster Stufe, d.h. eine gerichtete Strecke; durch die Bewegung einer gerichteten Strecke in eine geeignete Richtung entsteht eine Ausdehnungsgröße zweiter Stufe, d.h. eine orientierte Fläche; durch die Bewegung einer orientierten Fläche in eine geeignete Richtung entsteht eine Ausdehnungsgröße dritter Stufe, d.h. ein orientiertes Parallelepiped; usw. (Malle 1998: 118)

Hier macht Graßmann also den ersten Schritt in Richtung n-dimensionaler Vektorrechnung. Es zeigt sich, dass er, wie Malle (1998: 117) beschreibt, „eine Art universale Algebra, die

unabhängig von der geometrischen Anschauung entwickelt und begründet werden kann, aber bei Bedarf auf die Geometrie angewendet werden kann“, entwickeln zu versucht.

In seiner Schrift *Ausdehnungslehre* (1862) beschreibt Graßmann bereits sein Konzept des abstrakten n -dimensionalen Vektorraums, in dem auch die Ideen der Begriffe wie lineare Abhängigkeit und Unabhängigkeit sowie Basis und Dimension vorkommen.

2.3 Die Entstehung der modernen Vektorrechnung

Die Weiterentwicklung der oben angeführten Ideen und Konzepte ist ab der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts zum Großteil in der Hand der Physik. Malle (1998: 121) teilt die Zeit bis zur Entstehung der modernen Vektorrechnung in zwei Phasen ein. Die erste Phase, beginnend 1865 nach Hamiltons Tod bis ca. 1880, ist vor allem durch die Testung bereits bestehender Vektorsysteme auf ihre Brauchbarkeit in der Physik gekennzeichnet. Dabei spielt vor allem der Gegensatz zwischen dem algebraischen Konzept der Quaternionen und dem physikalischen Konzept der Ausdehnungsgrößen eine wichtige Rolle. Manche Physiker, wie Peter Guthrie Tait, sind Vertreter der Quaternionentheorie, während andere, wie James Clerk Maxwell und William Kingdon Clifford, gewisse Zweifel an dieser Theorie zeigen und wieder andere, wie Lord Kelvin, der gesamten Idee der Vektorrechnung skeptisch gegenüber stehen. Es entsteht also eine Grundsatzdiskussion im Hinblick auf die Brauchbarkeit von Graßmanns Ansatz auf der einen Seite und Hamiltons Konzept auf der anderen Seite (Malle 1998: 121).

In der zweiten Phase (1880-1900) hingegen werden große Schritte in der Weiterentwicklung der Vektorrechnung gemacht, vor allem durch Josiah Willard Gibbs und Oliver Heaviside (Malle 1998: 121). Sowohl Gibbs, als auch Heaviside, lösen sich weitgehend von Hamiltons Konzept der Quaternionen und übernehmen nur jene Aspekte der Quaternionentheorie, die aus ihrer Sicht brauchbar für die Physik sind (Malle 1998: 121). Beide tragen in ihrer Zeit viel zur Entwicklung vektorieller Methoden in der Infinitesimalrechnung bei (Mäder 1992: 122). Laut Malle (1998: 121) können Gibbs und Heaviside auf Grund ihrer Entwicklungen „als die eigentlichen Vollender der modernen Vektorrechnung bezeichnet werden.“

Auf Grund dessen, dass Vektoren von vielen verschiedenen Standpunkten und mit unterschiedlichen Zielen und Vorstellungen entwickelt worden sind, versucht man um 1900 eine klare Definition des Vektorbegriffs zu finden. Hier ist Guiseppe Peano (1858-1932) mit seiner Axiomatisierung des Vektorbegriffs zu nennen. Peanos Definition des Vektorraums ist auch die noch heute gängige Definition. Innerhalb des Vektorraums definiert er Vektoren als

Elemente dieses Vektorraums, für die er wiederum bestimmte Axiome und Operationen einführt (Malle 1998: 122). Hartmann (1993: 49) stellt in diesem Zusammenhang die Frage, ob man durch die Axiomatisierung des Vektorbegriffs tatsächlich die vielen verschiedenen Vorstellungen von Vektoren vereinbaren kann. Hartmann (1993: 49) listet folgende inhaltliche Vorstellungen von Vektoren im Laufe der Zeit auf:

- Vektor als Betrag und Richtung
- Vektor als gerichtete Strecke
- Vektor als lageunabhängige Figur
- Vektor als Punkt
- Vektor als gewichteter Punkt
- Vektor als Verschiebung
- Vektor als formaler Ausdruck
- Vektor als orientierte Fläche
- Vektor als Bewegung
- Vektor als n-Tupel
- Vektor als Rechenobjekt

Inwiefern diese verschiedenen inhaltlichen Vorstellungen des Vektorbegriffs in der Schule auftauchen, wird im weiteren Verlauf der Arbeit durch die Analyse von Lehrplänen, Schulbüchern und Studien ersichtlich sein. In der Schule wird die Vektorrechnung erst ab den 1960er Jahren eingeführt, aber „Vektoren sind heute aus der Analytischen Geometrie der Schule nicht mehr wegzudenken“ (Malle 2005b: 8).

3 Vom Lehrplan 1967 bis zu den Grundkompetenzen der standardisierten Reifeprüfung

Schwendenwein (2000: 53) beschreibt Lehrpläne als „*verbindliche und wohldurchdachte Planungsgrundlage für Unterricht und Erziehung*.“ Grundsätzlich beruht laut Schwendenwein (2000: 53) der Zweck eines Lehrplans darauf, „Lehr-Lerninhalte (meist als rechtliche Vorgaben) für den Unterricht festzulegen“. In anderen Worten dient ein Lehrplan dazu, die notwendigen und wichtigen Lehr-Lerninhalte festzulegen und deren Vermittlung zu planen. Der Lehrplan bildet also „die Grundlage der schulischen Ausbildung“ (Redelsteiner 2011: 8).

In Österreich beinhalten die in Bundesgesetzblättern veröffentlichten Lehrpläne der Allgemeinbildenden Höheren Schulen (AHS) verschiedenste Tabellen, sowie Stundentafeln mit Unterscheidung zwischen verschiedenen Schultypen und Fächern, Hinweise auf allgemeine didaktische Grundsätze und eine detaillierte Auflistung des fächerspezifischen Lehrstoffs und didaktischen Grundsätzen mit Bezug auf die einzelnen Fächer. Bei letzterem wird gegebenenfalls zwischen verschiedenen Schultypen unterschieden, da SchülerInnen je nach Schultyp mehr oder weniger Mathematikstunden pro Woche haben. Die große Bedeutung der verschiedenen Schultypen als Teil der Lehrpläne sieht auch Schwendenwein (2000: 54):

Lehrpläne *definieren* durch die in ihnen enthaltenen *Stundentafeln* nicht nur den Fächerkanon und dessen zeitliches Gewichtsprofil, sondern auch *Schultypen*, was durch die Festlegung der *schulstufenspezifischen Lehr-Lerninhalte* in den jeweils in Frage kommenden Unterrichtsfächern vervollständigt wird.

Außerdem wird beispielsweise im Lehrplan von 1967 betont, dass die Reihenfolge und Gliederung des Lehrplans keine zwingende Vorschrift hinsichtlich der tatsächlichen Reihenfolge und Gliederung im Unterricht sein sollen:

Anordnung, Gliederung und Akzentuierung des im Lehrplan der einzelnen Klassen angeführten Jahresstoffes einschließlich der Auswahl der notwendigen Beispiele sind der verantwortlichen Entscheidung des Lehrers überlassen. Die angegebene Reihenfolge der Sachgebiete bedeutet, wo sie sich nicht zwingend aus dem Zusammenhang des Stoffes ergibt, eine Empfehlung. Bei der Stoffauswahl ist neben dem sachlogischen Aufbau auch die Möglichkeit und Notwendigkeit exemplarischer Behandlung zu beachten. (Lehrplan 1967: 1716)

Weiters beinhaltet der Lehrplan in manchen Fällen optionale Stoffgebiete und Aspekte, die LehrerInnen gegebenenfalls, wenn diese angemessen und zweckdienlich sind, im Unterricht behandeln können, aber nicht müssen:

Die im Lehrplan durch Kursivdruck oder durch das Wort „allenfalls“ gekennzeichneten Erweiterungsstoffe sollen nur dann behandelt werden, wenn in einer Klasse günstige

Voraussetzungen gegeben sind und vor allem die Gewähr besteht, daß [sic] der verpflichtende Lehrstoff gründlich durchgearbeitet und in seinem Unterrichtsertrag gesichert werden kann. (Lehrplan 1967: 1716)

Die Kursivschreibweise wird in diesem Abschnitt beibehalten, um jene optionale Erweiterungstoffe anzuzeigen.

Im folgenden Kapitel wird der Fokus vor allem auf den Lehrstoff im Hinblick auf die Vektorrechnung gelegt. Die wichtigsten Unterschiede, die sich im Laufe der Zeit in den Lehrplänen abgezeichnet haben und auf Grund verschiedener Schultypen, falls angegeben, entstanden sind, werden herausgearbeitet, um die Entwicklung der Vektorrechnung bis zum heutigen Tage aufzuzeichnen. Dabei werden jeweils nur die Lehrpläne der relevanten Klassen beachtet. Direkte Zitate aus den Lehrplänen sind durch Einrahmung gekennzeichnet und deren Quellen werden entsprechend angegeben.

Um die Lesbarkeit dieser Arbeit zu erleichtern, wird bei den Lehrplänen von 1967 und 1978 die Unterscheidung zwischen den Schultypen folgendermaßen gekennzeichnet:

- (A) Das Humanistische Gymnasium, das Neusprachliche Gymnasium und das Wirtschaftskundliche Realgymnasium
- (B) Das Realistische Gymnasium, das Naturwissenschaftliche Realgymnasium und das Mathematische Realgymnasium

3.1 Der Lehrplan von 1967

Der Lehrplan von 1967 (LP 1967) enthält als erster Lehrplan die Vektoren als verpflichtenden Lehr-Lerninhalt für die Sekundarstufe II. Aber auch in der Sekundarstufe I kommt der Begriff „Vektor“ (LP 1967: 1788) vor, da Vektoren für die Darstellung der ganzen Zahlen auf der Zahlengerade verwendet werden sollen. Erst in der Sekundarstufe II werden Vektoren aber dann explizit behandelt. Bereits in der Bildungs- und Lehraufgabe für Mathematik der Sekundarstufe II sind einige Aspekte zu finden, die auf die Vektorrechnung bezogen werden können und sollen. Der Lehrplan schreibt vor, dass „[d]ie in der Unterstufe erworbene Fähigkeit, mathematische Fragestellungen des täglichen Lebens zu erkennen“ (LP 1967: 1790) auszuweiten ist. Außerdem soll „ein Einblick in die vielfältigen Wechselbeziehungen zwischen der Mathematik und den übrigen Kulturbereichen, insbesondere den Naturwissenschaften, der Technik, den Wirtschafts- und Sozialwissenschaften sowie der Philosophie“ (LP 1967: 1790) gegeben werden. Da die Vektorrechnung sowohl in alltäglichen Problemen, als auch

insbesondere in der Physik beispielsweise genutzt werden kann, sind diese Teile des Lehrplans besonders bedeutsam, weil ausdrücklich die Anwendungsorientierung verlangt wird.

Zu Beginn werden hier in detaillierter Form der „Lehrstoff am Humanistischen Gymnasium, am Neusprachlichen Gymnasium und am Wirtschaftskundlichen Realgymnasium für Mädchen“ (LP 1967: 1790-1793) angeführt und anschließend nur die Unterschiede zum „Lehrstoff am Realistischen Gymnasium, am Naturwissenschaftlichen Realgymnasium und am Mathematischen Realgymnasium“ (LP 1967: 1793-1796) aufgezeigt.

In der fünften Klasse schreibt der Lehrplan von 1967 für (A) folgendes zum Stoffgebiet der **Vektoren** vor (LP 1967: 1791):

Vektoren und Skalare, Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar, Addition und Subtraktion von Vektoren, Zusammenfassung im Begriff des linearen Vektorraumes. *Skalares Produkt von Vektoren.*

Anwendung der Vektorrechnung bei der Wiederholung der Elementargeometrie.

Es werden hier also die grundlegenden Rechenoperationen behandelt und vor allem der lineare Vektorraum definiert. Des Weiteren schreibt der Lehrplan zum Stoffgebiet **Analytische Geometrie** folgendes vor (LP 1967: 1791):

Kartesisches Koordinatensystem in der Ebene;

Spiegelung, Parallelverschiebung; Geradengleichung.

Der Lehrstoff für (B) hinsichtlich Vektoren und Analytischer Geometrie unterscheidet sich nur dadurch, dass das Skalarprodukt von Vektoren hier nicht optional ist. Alle anderen Bereiche sind ident (LP 1967: 1794).

In der sechsten Klasse schreibt der Lehrplan für (A) folgende Lehr-Lerninhalte zu **Vektoren** beziehungsweise zur **Analytischen Geometrie** vor (LP 1967: 1791):

Komponenten und Koordinaten von Vektoren, skalares Produkt.

Vektorielles Produkt.

Lineare Abhängigkeit von Vektoren.

Anwendungen auf Trigonometrie und analytische Geometrie,

Analytische Geometrie der Ebene: Flächeninhalt des Dreiecks, Geradengleichung in vektorieller Gestalt, Abstand eines Punktes von einer Geraden.

Geradenbüschel.

Analytische Geometrie des Raumes: Räumliches kartesisches Koordinatensystem, Ebenengleichung.

Ebenenbüschel, Gerade im Raum, Drehung des Koordinatensystems in der Ebene und im Raum

Wie bei den Lehrinhalten der sechsten Klasse sind die Unterschiede zu dem Lehrstoff für (B) eher gering und beschränken sich auf optionale Stoffinhalte, die für (B) nun verpflichtend sind, wie das vektorielle Produkt, Geradenbüschel, Ebenenbüschel und die Drehung des Koordinatensystems in der Ebene. Außerdem ist hier noch die Gerade im Raum als optionaler Inhalt hinzugefügt worden (LP 1967: 1794).

In der siebten Klasse kommt die Vektorrechnung im Lehrplan nur noch sehr kurz und hauptsächlich in Form von optionalen Inhalten vor. Für (A) steht folgendes im Lehrplan (LP 1967: 1792):

Anwendung der Vektorrechnung auf die analytische Geometrie.

Vektorielle Darstellung der komplexen Zahlen.

Ausführung der vier Grundrechnungsarten mit Hilfe von Vektoren.

Wie zuvor unterscheidet sich der Lehrstoff für (B) nur durch die verpflichtende Behandlung des letzten Punktes, alle anderen sind ident (LP 1967: 1795).

In der achten Klasse scheint die Vektorrechnung sowohl bei (A) als auch bei (B) nur noch als optionaler Bereich mit „Gelegentlicher Anwendung der Vektorrechnung im Geometriestoff“ auf (LP 1967: 1792, 1795).

In der neunten Klasse schreibt der Lehrplan schließlich die Behandlung folgender Inhalte für (A) und (B) vor, hier gibt es keine Unterschiede (LP 1967: 1793, 1796):

Zum Stoffgebiet „**Vektoren**“:

Wiederholung der Vektorrechnung. Axiomatische Behandlung des linearen Vektorraumes.

Vektorielle Behandlung der Kegelschnitte.

Zum Stoffgebiet „**Analytische Geometrie**“:

Rückblick auf die analytische Geometrie in der Geraden, in der Ebene und im Raum, Hinweis auf Räume höherer Dimension.

Abschließend ist zu sagen, dass die Unterschiede des Lehrstoffes für (A) und (B) durch die höhere Anzahl an Mathematikstunden in den Zweigen von (B) zu erklären sind.

3.2 Der Lehrplan von 1978

Der Lehrplan von 1978 (LP 1978) weist einige Unterschiede in seinem Aufbau und Inhalt zu jenem von 1967 auf. Die grundsätzliche Struktur des Lehrplans mit seiner Einteilung in die Unterkapitel „Bildungs- und Lehraufgabe“ (LP 1978: 817) sowie „Lehrstoff am Humanistischen Gymnasium, am Neusprachlichen Gymnasium und am Wirtschaftskundlichen Realgymnasium für Mädchen“ (LP 1978: 820-821), „Lehrstoff am Realistischen Gymnasium, am Naturwissenschaftlichen Realgymnasium und am Mathematischen Realgymnasium“ (LP 1978: 821-822) und „Didaktische Grundsätze“ (LP 1978: 822-823) ist erhalten geblieben. Allerdings beinhaltet die „Bildungs- und Lehraufgabe“ (LP 1978: 817) weniger Hinweise auf die Anwendung der Mathematik im realen Leben, sondern fokussiert beispielsweise stärker auf „exakte[s] und kritische[s] Denken“, „Beweisverfahren“ und die „Schulung der Geläufigkeit in den wichtigsten Rechenverfahren“ (LP 1978: 820). Einzig der folgende Unterpunkt weist noch auf die Verwendung der Mathematik zum Lösen von Problemen hin: „Entwicklung der Fähigkeit zur mathematischen Behandlung von Problemen aus den Naturwissenschaften, den Sozial- und Wirtschaftswissenschaften und aus anderen Bereichen“ (LP 1978: 820). Die Anwendungsorientierung wird allerdings ausführlicher im Abschnitt „Didaktische Grundsätze“ (LP 1978: 822-823) behandelt. Unter anderem besagt der Lehrplan, dass „die Möglichkeiten, die Schwierigkeiten und die Grenzen der Anwendbarkeit der Mathematik aufgezeigt werden [sollen]“ (LP 1978: 823).

Weitere Unterschiede in der Strukturierung des Lehrplans von 1978 sind die offensichtliche Umstellung von fünf Jahren in der Sekundarstufe II auf lediglich vier und der Verzicht auf die Unterteilung und Zuteilung der Unterpunkte zu den einzelnen Stoffgebieten, wie es noch im Lehrplan von 1967 zu sehen war. Diese Unterpunkte des Lehrinhalts werden nun einfach ohne Zwischenüberschriften aufgelistet, sind aber immer noch in einer sinnvollen Reihenfolge geordnet.

Wie bereits beim Lehrplan von 1967 gibt es auch hier eine Unterscheidung der Lehrinhalte je nach Schulzweig. In der fünften Klasse allerdings sind die Inhalte im Hinblick auf die Vektorrechnung ident (LP 1978: 820-822):

Vektoren der Ebene und des Raumes. Zahlenpaare und Zahlentripel als Vektoren. Addition von Vektoren, Multiplikation von Vektoren mit Skalaren.

Parameterdarstellung einer Geraden in der Ebene und im Raum.

Parameterdarstellung einer Ebene im Raum.

Hier weist der Lehrplan von 1978 im Gegensatz zum Lehrplan von 1967 indirekt auf die inhaltliche Vorstellung von Vektoren sowohl aus geometrischer als auch aus algebraischer Sicht hin. Die angesprochenen Rechenoperationen sind in beiden Lehrplänen gleichermaßen zu finden, während die Bedeutung des Begriffs des linearen Vektorraums aus dem Lehrplan genommen worden ist. Die Parameterdarstellungen von Gerade und Ebene ist im Vergleich zum vorhergehenden Lehrplan bereits in der fünften Klasse vorgeschrieben.

Für die sechste Klasse schreibt der Lehrplan von 1978 für (A) folgendes vor (LP 1978: 821):

Skalares Produkt.

Gleichung einer Geraden in der Ebene und einer Ebene im Raum (Normalvektorform).

Anwendung auf Abstands- und Flächenberechnungen.

Für (B) kommt hier lediglich das vektorielle Produkt hinzu, ansonsten sind die Inhalte ident (LP 1978: 822). Dies ähnelt dem vorhergehenden Lehrplan insofern, dass auch dort das vektorielle Produkt nur für (B) verpflichtend vorgegeben ist. Die Behandlung der Normalvektorform der Geraden im $\mathbb{R}^2$ sowie der Ebene im $\mathbb{R}^3$ sind hier vollkommen neu, die Normalvektorform kommt im Lehrplan von 1967 nicht vor. Der letzte Punkt ist hier sehr allgemein verfasst, denn welche Abstände (von Gerade zu Ebene, Ebene zu Ebene, Gerade zu Gerade, etc.) berechnet werden sollen, wird hier nicht spezifiziert. Es stellt sich außerdem die Frage, ob hier die Lagebeziehungen nicht als grundsätzliche Voraussetzung für Abstandsberechnungen behandelt werden müssten.

Andere Lehrinhalte, die im Lehrplan von 1967 noch beschrieben sind, kommen im Lehrplan von 1978 gar nicht mehr vor, beispielweise Geraden- und Ebenenbüschel, die lineare Abhängigkeit von Vektoren und die Drehung des Koordinatensystems in der Ebene. Optionale Inhalte von 1967 wie „Vektorielle Behandlung der Kegelschnitte“ und die „Axiomatische Behandlung des linearen Vektorraumes“ (Lehrplan 1967: 1793) sind hier gar nicht mehr anzufinden.

Im Gegensatz zum Lehrplan von 1967, kommt die Vektorrechnung in der siebten und achten Klasse nicht mehr explizit vor, sondern nur noch indirekt im folgenden Unterpunkt: „Zusammenfassende Wiederholung und Vertiefung des Lehrstoffes der Oberstufe“ (LP 1978: 821-822).

3.3 Der Lehrplan von 1989

Wie die beiden vorhergehenden Lehrpläne ist auch der Lehrplan aus dem Jahre 1989 (LP 1989) in die gleichen Abschnitte eingeteilt. Auffällig ist die Anführung der Bildungs- und Lehraufgabe sowie des Lehrstoffs auf viel detailliertere und ausführlichere Art und Weise. Bereits im Abschnitt „Bildungs- und Lehraufgabe“ (LP 1989: 753) werden die Aufgaben in Unterpunkte unterteilt. Hier wird der Fokus erneut auf die Anwendung der Mathematik gelegt. Unter anderem sollen SchülerInnen „ihr mathematisches Wissen und Können in verschiedenen Bereichen, insbesondere in solchen, die zu ihrer Lebens- und Wissenswelt Bezug haben, anwenden können“ und „Mathematik als nützliches Werkzeug zur Lösung von Alltagsproblemen erkennen“ (LP 1989: 753). Die Unterteilung des Lehrstoffs erfolgt in diesem Lehrplan wieder auf Grund der verschiedenen Wochenstundenanzahlen in Mathematik in den verschiedenen Zweigen: einerseits im Gymnasium und im Wirtschaftskundlichen Realgymnasium (LP 1989: 754-765) und andererseits im Realgymnasium (LP 1989: 765-769). Für erstere Zweige besagt der Lehrplan unter dem Punkt „Lineare Algebra und lineare analytische Geometrie“ (LP 1989: 756-757) folgendes zu Vektoren in der fünften Klasse:

Die Schüler sollen mit Vektoren sowohl unter algebraischen als auch unter geometrischen Gesichtspunkten arbeiten. Einerseits sollen sie erkennen, daß [sic] mit Vektoren ähnlich wie mit Zahlen gerechnet werden kann und daß [sic] Vektoren ein Mittel sein können, um komplexere Rechenoperationen, Begriffe und Beziehungen einfach darzustellen und gegebenenfalls ins Höherdimensionale zu übertragen. Andererseits sollen die Schüler Vektoren als ein Mittel zum Beschreiben von geometrischen Sachverhalten und Lösungswegen verwenden. Das Denken in geometrischen Vorstellungen, die mit Vektoren verbunden sind, kann eine Hilfe beim Lösen geometrischer Probleme sein. In der Geometrie soll auch der Vorteil einer einheitlichen Behandlung von Ebene und Raum angedeutet werden.

Gegenseitiges Zuordnen von Zahlenpaaren bzw. Zahlentripeln und geometrischen Objekten (Punkte, Pfeile, allenfalls Pfeilklassen oä.).

(→ Grundlegende Kenntnisse und Fertigkeiten, Darstellen und Interpretieren)

Addieren von Vektoren, Multiplizieren von Vektoren mit reellen Zahlen, Rechnen mit dem skalaren (inneren) Produkt von Vektoren:

Ausführen dieser Rechenoperationen für Zahlen – n-Tupel. Herstellen von Zusammenhängen zwischen Rechenoperationen (Beziehungen) im $\mathbb{R}^2$ bzw. $\mathbb{R}^3$ und geometrischen Operationen (Beziehungen) in der Ebene bzw. im Raum (im Falle des Skalarproduktes eingeschränkt auf

das Normalstehen von Vektoren in der Ebene). Berechnen des Betrages eines Vektors. Darstellen von Sachverhalten aus Anwendungsgebieten (etwa Physik, Wirtschaft) mit Hilfe dieser Rechenoperationen.

(→ Grundlegende Kenntnisse und Fertigkeiten, Darstellen und Interpretieren)

Rechengesetze für Vektoren:

Erkennen, Formulieren, Beweisen und bewußtes [sic] Anwenden.

(→ Grundlegende Kenntnisse, Produktives Arbeiten, Darstellen, Argumentieren und exaktes Arbeiten)

Darstellen von Geraden der Ebene und des Raumes in Parameterform:

Erläutern, wie man mit Hilfe eines Punktes und eines Richtungsvektors einzelne Punkte (etwa Mittelpunkt oder Teilungspunkte einer Strecke) oder auch alle Punkte einer Geraden erfassen kann. Bestimmen einer Parameterdarstellung zu einer gegebenen Geraden, Zeichnen einer in Parameterform gegebenen Geraden.

(→ Grundlegende Kenntnisse und Fertigkeiten, Darstellen und Interpretieren)

Es ist offensichtlich, dass auch betreffend des Lehrstoffs ein viel detaillierterer und ausführlicherer Ansatz gewählt worden ist als in den vorhergehenden Lehrplänen. Zum ersten Mal wird dezidiert auf den Stellenwert, sowohl des algebraischen, als auch des geometrischen Ansatzes hingewiesen. Dabei geht es nicht nur um die inhaltliche Interpretation von Vektoren, sondern auch um die zugehörigen Rechenoperationen. Interessant ist auch der Gesichtspunkt der „einheitlichen Behandlung von Ebene und Raum“ (LP 1989: 756), da hier zwar auf die Übertragbarkeit vieler Konzepte hingewiesen wird, die Unterschiede aber nicht erwähnt werden. Erstmals wird auch die Berechnung des Betrags eines Vektors explizit erwähnt und auf die Vektoren mit physikalischer und wirtschaftlicher Anwendung verwiesen. Die Rechengesetze von Vektoren werden hier auch in den Lehrplan aufgenommen, wobei diese nicht nur formuliert und bewiesen, sondern auch erkannt und bewusst angewendet werden sollen. Die Parameterdarstellung einer Geraden, sowohl im $\mathbb{R}^2$, als auch im $\mathbb{R}^3$, ist zwar schon im Lehrplan von 1978 vorgeschrieben, aber im Lehrplan von 1989 ist auch dieser Teil der Vektorrechnung um einiges detaillierter ausformuliert. Die Parameterdarstellung soll nicht einfach nur insofern behandelt werden, damit SchülerInnen damit rechnen können. Sie sollen auch erklären können, wieso die Parameterdarstellung einer Geraden überhaupt eine Gerade darstellt und dies auch zeichnerisch darstellen können.

Derselbe Lehrplan gilt andererseits auch für das Realgymnasium, allerdings wird Folgendes ergänzt: (LP 1989: 766):

Bearbeiten von geometrischen Problemen in der Ebene mit algebraischen Methoden:

Lösen von Lage- und Maßaufgaben unter Heranziehung von Kenntnissen über Vektoren sowie über lineare Gleichungen und Gleichungssysteme; nach Möglichkeit Verbinden von rechnerischen mit konstruktiven Lösungen. Beschreiben von Lösungswegen (unter Umständen auch ohne Durchführen der Rechnungen), gegebenenfalls Begründen des Vorgehens. Aufstellen einfacher Vektorformeln. Beweisen geometrischer Sachverhalte bzw. Auseinandersetzen mit solchen Beweisen.

(→ Produktives Arbeiten, Darstellen und Interpretieren, Argumentieren)

Hier wird erneut die enge Beziehung zwischen der Geometrie und der Algebra aufgezeigt. Interessanterweise werden Lageaufgaben nur für diesen Zweig vorgeschrieben, obwohl die Lagebeziehungen zwischen Ebenen in der sechsten Klasse verpflichtend verankert sind, wie weiter unten beschrieben wird. Auffallend ist auch, dass Wege zur Lösung bestimmter Aufgaben teilweise sogar nur beschrieben und unter Umständen erklärt und begründet werden müssen, gegebenenfalls ohne explizite Rechnungen durchzuführen. Außerdem spielen Vektorformeln und deren Beweise in diesem Zweig eine größere Rolle.

Für die sechste Klasse im Gymnasium und im Wirtschaftskundlichen Realgymnasium stehen folgende Lehrinhalte des Lehrplans im Zusammenhang mit Vektoren (LP 1989: 759-760):

Skalarprodukt und Winkel:

Bestimmen von Normalvektoren im Raum, Untersuchen von Orthogonalitäten. Berechnen von Winkeln zwischen zwei Geraden, zwei Ebenen sowie zwischen einer Geraden und einer Ebene.

(→ Grundlegende Fertigkeiten)

Ebenen und lineare Gleichungen in drei Variablen:

Erläutern von Zusammenhängen zwischen Ebenen und linearen Gleichungen. Untersuchen von Lagebeziehungen zwischen Ebenen, Berechnen von Schnittpunkten und Schnittgeraden.

Insbesondere Lösen von Systemen von drei Gleichungen mit eindeutiger Lösung und von Systemen von zwei Gleichungen mit einparametrischer Lösungsmenge.

Die Winkelberechnung mit Hilfe des skalaren Produkts kommt hier als neuer Lehrstoff hinzu; dabei wird auch spezifiziert, welche Winkel berechnet werden können müssen. Des Weiteren

sind die verschiedenen Lagebeziehungen dreier Ebenen und der Zusammenhang zu deren algebraischer Interpretation ein neues, bedeutsames Kapitel, das sich im Lehrplan der sechsten Klasse wiederfindet. Dabei kommt dem Spezialfall, dass ein Schnittpunkt oder eine Schnittgerade Lösung eines Gleichungssystems mit drei Gleichungen und drei Variablen sind, besondere Bedeutung zu. Die Parameterdarstellung einer Ebene wird hier nur als optionaler Stoff unter „allenfalls“ (LP 1989: 760) angeführt.

Wie bisher ist der wesentlichste Unterschied zum Lehrstoff des Realgymnasiums die Hinzunahme des vektoriellen Produkts (LP 1989: 767):

Definieren des vektoriellen Produktes, Kennen von Eigenschaften, Beweisen von Rechengesetzen. Kennen von Anwendungen in Geometrie und Physik.

(→ Vertiefte Kenntnisse, Argumentieren und exaktes Arbeiten, Anwendungen von Mathematik)
--

Im Gegensatz zu vorhergehenden Lehrplänen sollen hier auch die Eigenschaften des vektoriellen Produkts genauer behandelt und die Rechengesetze bewiesen werden. Das vektorielle Produkt soll schließlich auch auf geometrische und physikalische Aufgaben angewendet werden. Des Weiteren sind Beweise in der Vektorrechnung und die Matrizenrechnung zusätzliche Gebiete, die nur im Realgymnasium behandelt werden sollen (LP 1989: 760).

Wie im Lehrplan von 1978 kommt die Vektorrechnung in der siebten und achten Klasse nicht mehr vor.

3.4 Der Lehrplan von 2004

Auch der heute aktuelle Lehrplan (LP 2004) ist in die Abschnitte „Bildungs- und Lehraufgabe“ (LP 2004: 1-2), „Didaktische Grundsätze“ (LP 2004: 2-3) und „Lehrstoff“ (LP 2004: 3-6) gegliedert. Interessanterweise gibt es hier keine Unterscheidung mehr zwischen verschiedenen Schulzweigen mit unterschiedlicher Wochenstundenzahl in Mathematik. Auch optionale Bereiche werden nicht mehr angegeben. Die Unterteilung in Klassen sowie in Unterkapitel wie zum Beispiel „Vektoren und analytische Geometrie der Ebene“ (LP 2004: 4) bleiben erhalten. Es fällt jedoch sofort auf, dass der Lehrstoff jetzt doch wieder in stark gekürzter Form dargestellt wird und weit weniger ausführlich formuliert ist, als es im Lehrplan von 1989 der Fall war. Die essentielle Änderung, die vom Lehrplan von 1989 zum Lehrplan von 2004 stattgefunden hat, bezieht sich also auf die Teilung des Stoffgebietes der Vektorrechnung in die Behandlung dieser in der Ebene in der fünften Klasse und im Raum in der sechsten Klasse.

Für die fünfte Klasse ist also Folgendes vorgeschrieben (LP 2004: 4):

- Addieren von Vektoren und Multiplizieren von Vektoren mit reellen Zahlen, geometrisches Veranschaulichen dieser Rechenoperationen
- Ermitteln von Einheitsvektoren und Normalvektoren
- Arbeiten mit dem skalaren Produkt, Ermitteln des Winkels zweier Vektoren
- Beschreiben von Geraden durch Parameterdarstellungen und durch Gleichungen, Schneiden von Geraden
- Lösen von geometrischen Aufgaben, gegebenenfalls unter Einbeziehung der Elementargeometrie

Hier werden nun auch Einheitsvektoren zum ersten Mal als Teil des Lehrplans erwähnt. In Bezug auf die Addition von Vektoren und der Multiplikation mit einem Skalar wird davon ausgegangen, dass diese Rechenoperationen algebraisch eingeführt und dann geometrisch veranschaulicht werden. Die Parameterdarstellung von Geraden bleibt im Lehrplan der fünften Klasse erhalten. Da diese Inhalte unter der Überschrift „Vektoren und analytische Geometrie der Ebene“ (LP 2004: 4) zu finden sind, sind ausschließlich Geraden im $\mathbb{R}^2$ zu behandeln. Das Schneiden der Geraden wird im Gegensatz zum Lehrplan von 1989 bereits in allen Zweigen in der fünften Klasse bearbeitet. Beweise jeglicher Art werden in diesem Lehrplan gar nicht mehr erwähnt. Der letzte Punkt ist bereits in älteren Lehrplänen als optionaler Lehrstoff vorgekommen und wird hier erstmals als verpflichtend angeführt.

In der sechsten Klasse findet man schließlich unter dem Abschnitt „Analytische Geometrie des Raumes“ (LP 2004: 5) folgendes:

- Übertragen bekannter Begriffe und Methoden aus der zweidimensionalen analytischen Geometrie, Erkennen der Grenzen dieser Übertragbarkeit
- Ermitteln von Normalvektoren, Definieren des vektoriellen Produkts
- Beschreiben von Geraden und Ebenen durch Parameterdarstellungen bzw. Gleichungen
- Schneiden von Geraden und Ebenen, Untersuchen von Lagebeziehungen
- Lösen von geometrischen Aufgaben, gegebenenfalls unter Einbeziehung der Elementargeometrie und der Trigonometrie

In diesem Lehrplan wird auf die Übertragbarkeit der Begriffe, Methoden und Rechenoperationen vom $\mathbb{R}^2$ auf den $\mathbb{R}^3$ hingewiesen. Wichtig dabei ist vor allem, auch deren Grenze zu erkennen. Das vektorielle Produkt ist nun im Lehrplan für alle Schulzweige und nicht mehr nur ausschließlich für die Realgymnasien verankert. Die Parameterdarstellung von

Ebenen ist ebenfalls neu als verpflichtender Lehrinhalt, während die der Geraden bereits aus vorhergehenden Lehrplänen bekannt ist. Auch die Lagebeziehungen von Geraden und Ebenen sind laut diesem Lehrplan vorgeschrieben. Hier wird jedoch nicht spezifiziert, ob beispielsweise die Lagebeziehungen zweier Geraden beziehungsweise zweier Ebenen ausreichend sind oder ob die Lagebeziehungen zwischen Gerade und Ebene und vor allem zwischen drei Ebenen ebenfalls verpflichtend behandelt werden müssen. Trigonometrische Aufgaben sollen ebenso laut Lehrplan mit Hilfe der Vektorrechnung gelöst werden.

Auch in diesem Lehrplan kommt die Vektorrechnung in der siebten und achten Klasse nicht mehr explizit vor. Am Ende des Lehrstoffes der achten Klasse wird nur indirekt unter anderem die Vektorrechnung erneut durch folgenden Punkt angesprochen (LP 2004: 6):

Umfassendes Wiederholen, Vertiefen und Vernetzen von Stoffgebieten

3.5 Die Grundkompetenzen für die zentrale Reifeprüfung

In diesem Abschnitt werden die Grundkompetenzen in Bezug auf die Vektorrechnung kurz vorgestellt und mit den Anforderungen des aktuellen Lehrplans aus dem Jahre 2004 (LP 2004) verglichen. Abbildung 1 gibt einen Überblick über die Grundkompetenzen betreffend der Vektoren (Liebscher et al. 2013: 9). Grün unterlegte Felder deuten dabei auf eine erstmalige Behandlung dieser Grundkompetenzen in der entsprechenden Klasse hin, während grau unterlegte Felder lediglich auf die Festigung dieser Grundkompetenzen in diesem Jahrgang hinweisen. Die Vektorrechnung ist in der Liste der Grundkompetenzen dem Inhaltsbereich ‚Algebra und Geometrie‘ (AG) zugeordnet.

AG 3	Vektoren	5. Kl.	6. Kl.	7. Kl.	8. Kl.
AG 3.1	Vektoren als Zahlentupel verständig einsetzen und im Kontext deuten können	✓	✓	✓	✓
AG 3.2	Vektoren geometrisch (als Punkte bzw. Pfeile) deuten und verständig einsetzen können	✓	✓	✓	✓
AG 3.3	Definition der Rechenoperationen mit Vektoren (Addition, Multiplikation mit einem Skalar, Skalarmultiplikation) kennen, Rechenoperationen verständig einsetzen und (auch geometrisch) deuten können	✓	✓	✓	✓
AG 3.4	Geraden durch (Parameter-)Gleichungen in $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$ angeben können; Geradengleichungen interpretieren können; Lagebeziehungen (zwischen Geraden und zwischen Punkt und Gerade) analysieren, Schnittpunkte ermitteln können	✓	✓	✓	✓
AG 3.5	Normalvektoren in $\mathbb{R}^2$ aufstellen, verständig einsetzen und interpretieren können	✓	✓	✓	✓
Anmerkung: Vektoren sind als Zahlentupel, also als algebraische Objekte zu verstehen und in entsprechenden Kontexten verständig einzusetzen. Punkte und Pfeile in der Ebene und im Raum müssen als geometrische Veranschaulichung dieser algebraischen Objekte interpretiert werden können. Die geometrische Deutung der Skalarmultiplikation (in $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$) meint hier nur den Spezialfall $a \cdot b = 0$. Geraden sollen in Parameterform, in $\mathbb{R}^2$ auch in parameterfreier Form, angegeben und interpretiert werden können.					

Abbildung 1: Grundkompetenzen – Vektorrechnung (Liebscher et al. 2013: 9)

AG 3.1, AG 3.2 und AG 3.3 stimmen mit den Anforderungen des Lehrplans für die fünfte Klasse insofern überein, da hier, wie auch in der Anmerkung in Abbildung 1 zu lesen, der Fokus auf dem algebraischen Verständnis von Vektoren liegt und die Geometrie lediglich als mögliche Deutung angeführt wird. Auch die Darstellung von Geraden in Parameterform, die Lagebeziehungen zwischen Geraden und das Schneiden von Geraden sind sowohl im Lehrplan für die fünfte Klasse als auch in den Grundkompetenzen verankert. Schließlich ist AG 3.5 ebenfalls im Lehrplan für die fünfte Klasse vertreten, allerdings fehlen die Einheitsvektoren in den Grundkompetenzen.

Die Anforderungen des Lehrplans für die sechste Klasse sind jedoch in den Grundkompetenzen nur noch in geringem Ausmaß vertreten. Lediglich die Parameterdarstellung von Geraden im Raum ist Teil von AG 3.4. Die Übertragbarkeit der Begriffe und Methoden von der Ebene in den Raum fällt unter AG 3.1 bis AG 3.3, wird aber nicht dezidiert angesprochen. Weitere Lehrinhalte wie das vektorielle Produkt, Normalvektoren im $\mathbb{R}^3$, Ebenengleichungen und Lagebeziehungen zwischen Geraden und Ebenen sowie die Anwendung der Vektorrechnung für das „Lösen von geometrischen Aufgaben, gegebenenfalls unter Einbeziehung der Elementargeometrie und der Trigonometrie“ (LP 2004: 5) sind nicht Teil der Grundkompetenzen.

4 Verschiedene Vektormodelle

Wie bereits in Kapitel 2 zu sehen war, ist die Frage „Was ist ein Vektor?“ schon im Laufe der Geschichte nicht einfach zu beantworten gewesen, dies hat sich auch heute nicht geändert. Malle (2005b: 8) stellt fest, dass Vektoren auf Hochschulebene mit Hilfe einer axiomatischen Definition eines Vektorraums und der daraus folgenden Definition von Vektoren als Elemente dieses Vektorraums eingeführt werden. Er weist jedoch darauf hin, dass eine solche Einführung des Vektorbegriffs in der Schule nicht sinnvoll und zielführend sei, obwohl die Definition eines Vektorraums „die Rahmenbedingungen, die ein schulischer Vektorbegriff erfüllen muss“, bildet (Malle 2005b: 8). Laut Malle geht es vorerst darum, dass SchülerInnen eine angemessene inhaltliche Vorstellung davon entfalten, was ein Vektor ist. Eine Studie von Hartmann (1993: 51) zeigt, dass sich diese inhaltlichen Vorstellungen von Vektoren der SchülerInnen grob in zwei Gruppen einteilen lassen. Auf der einen Seite stehen jene SchülerInnen, die Vektoren als geometrische Objekte interpretieren, die Vektoren beispielsweise als Pfeile, Punkte oder gerichtete Strecken verstehen. Auf der anderen Seite gibt es jene, die einen Vektor als arithmetisches Objekt deuten, die einen Vektor als Rechenobjekt betrachten, welches man für die Lösung bestimmter Aufgaben in der Mathematik und Physik verwenden kann. Diese Unterscheidung wird im Folgenden noch in detaillierter Form behandelt.

Zunächst werden im folgenden Kapitel verschiedene Vektormodelle betrachtet, wobei die meisten auf einer geometrischen Interpretation und Vorstellung von Vektoren basieren. Unter diesen werden das Pfeilklassenmodell, das Modell der Ortsvektoren und das Translationsmodell diskutiert. Des Weiteren wird schließlich das Modell der n -Tupel als algebraischer Zugang betrachtet und im Hinblick auf deren geometrische Deutung beleuchtet. Im Anschluss an eine Vorstellung des jeweiligen Modells und passender Literatur und Studien, falls vorhanden, werden Beispiele aus Schulbüchern angeführt, verglichen und evaluiert. Alle grau unterlegten Kästchen sind dabei direkte Zitate aus Schulbüchern, deren Quellen entsprechend gekennzeichnet sind.

4.1 Das Pfeilklassenmodell

4.1.1 Literatur und Studien

Laut Malle (2005b: 9) ist das Modell der Pfeilklassen bereits in den Anfängen der Vektorrechnung in der Schule das vorherrschende Modell. Auch im Jahre 2005 ist das Pfeilklassenmodell noch in vielen Schulbüchern anzufinden, „wenn auch manchmal in

modifizierter Form“ (Malle 2005b: 9). Trotz seiner Beliebtheit in der Schule wird das Pfeilklassenmodell jedoch auf Hochschulebene nicht aufgegriffen.

Wittmann (2003: 67) betont, dass die Einführung von Vektoren als Pfeilklassen „ein Sammelbegriff für unzählige Varianten zur Festlegung des Begriffs ‚Vektor‘ ist“. Anhand einiger Beispiele aus Schulbüchern wird gezeigt, dass oft keine mathematische Definition für Vektoren angegeben wird, „sondern eine fachlich verkürzte Begriffsexplikation, die Elemente einer Definition mit Veranschaulichungen, syntaktischen Aspekten und abkürzenden Schreibweisen verbindet“ (Wittmann 2003: 68). Wittmann (2003: 68) unterscheidet schließlich zwischen folgenden beiden Kategorien des Pfeilklassenmodells:

- „Vektor als *Menge oder (Äquivalenz)Klasse aller parallelgleichen Pfeile*; die zugrunde liegende Äquivalenzrelation wird im Allgemeinen nur anschaulich formuliert, ohne wirklichen Nachweis, dass es sich um eine Äquivalenzrelation handelt;“ (Wittmann 2003: 68)
- „Vektor als *Verschiebung*; dass ein Vektor durch unendlich viele parallelgleiche Pfeile dargestellt werden kann, wird in diesem Fall aus der Abbildungsgeometrie begründet; die Äquivalenzklassenbildung wird in der Regel nicht explizit angesprochen.“ (Wittmann 2003: 68)

Diese beiden Kategorien scheinen tatsächlich in Schulbüchern zu dominieren, wie in anschließenden Abschnitten gezeigt wird.

Malle (2007: 81) liefert eine formale Beschreibung des Pfeilklassenmodells, die nicht direkt aus einem Schulbuch entnommen ist. Er beschreibt dieses Modell folgendermaßen:

In diesem Modell wird ein Vektor als **Pfeilklass**e aufgefasst, d.h. als eine Menge gleich langer, gleich gerichteter und gleich orientierter Pfeile [...]. Jeder Pfeil einer solchen Pfeilklass wird Repräsentant der Pfeilklass genannt. Für diese Pfeilklassen werden Rechenoperationen (Addition, Subtraktion, Vervielfachung) über Repräsentanten definiert.

Aus diesem Modell ergibt sich laut Malle (2007: 81) folgendes Problem: „Bei jeder Definition muss die Unabhängigkeit von der Auswahl der Repräsentanten nachgewiesen werden.“ Dies kann zum Teil sehr viel Aufwand bedeuten und auch die Beweise der Rechengesetze erfordern teilweise sehr komplexe Überlegungen.

Malle (2007: 82-84) listet eine Reihe von didaktischen Überlegungen auf, in denen er das Pfeilklassenmodell zwar als mathematisch korrekt bezeichnet, aber mehrere Argumente anführt, die zeigen, dass dieses Modell eine „didaktische Fehlentwicklung“ (Malle 2007: 84) gewesen ist. Erstens sei das Modell der Pfeilklassen „unbrauchbar für die Analytische Geometrie“ (Malle 2007: 82), denn niemand betrachtet Pfeilklassen, sondern man stellt sich Punkte und Pfeile vor. Zweitens sei dieses Modell „unbrauchbar für die Physik (zumindest [für

die] Schulphysik)“ (Malle 2007: 82). Malle (2007: 82) argumentiert anhand des Beispiels von Kraftvektoren, dass hier beispielsweise selten die Rede von Pfeilklassen sein kann, da man diese keinesfalls „beliebig in der Gegend herum schieben“ darf. Drittens führt Malle (2007: 82-83) die Unterscheidung zwischen Klassen und Repräsentanten als verwirrenden Faktor für SchülerInnen ein. Viertens zeigt Malle (2007: 83) auf, wie bereits oben kurz erwähnt, dass die Beweise der Rechengesetze sowie die Einführung der Rechenoperationen mit viel größerem Aufwand verbunden sind, als im Modell der n-Tupel. Für die SchülerInnen seien beispielsweise die Rechenoperationen im algebraischen Modell im Gegensatz zu den verschiedenen geometrischen Modellen um einiges verständlicher und logisch nachvollziehbarer. Fünftens seien laut Malle (2007: 83) in manchen Schulbüchern der 1960er Jahre unsaubere Behandlungen von Vektoren anzufinden. Obwohl meist eine mathematisch korrekte Definition in Anlehnung an das Pfeilklassenmodell vorliegt, wird diese Definition scheinbar nur unter dem Vorwand von mathematischer Korrektheit angeführt, aber in den Beispielen nicht mehr berücksichtigt, da dann plötzlich von Vektoren als einzelnen Pfeilen die Rede ist.

All diese Überlegungen, insbesondere die letzte, scheinen SchülerInnen Probleme zu bereiten, adäquate inhaltliche Vorstellungen von Vektoren zu entwickeln. In ihrer Studie zeigt Hartmann (1993)², dass SchülerInnen tatsächlich Schwierigkeiten haben, einen Vektor als eine Gesamtheit von Pfeilen mit gleicher Länge, Richtung und Orientierung zu akzeptieren. In einem Interview mit einer Schülerin, Alexandra, ist beispielsweise deutlich zu erkennen, dass sie einen Vektor nicht als Pfeilkategorie, sondern als Einzelpfeil betrachtet. Auf die Frage, was sie zu der Aussage „Ein Vektor ist die Gesamtheit dieser Pfeile“ (Hartmann 1993: 55) sagen würde, antwortet sie, dass das nicht stimmen könne. Alexandra meint: „Ein Vektor ist etwas Einzelnes. Es gibt natürlich mehrere Vektoren, das sind dann mehrere Pfeile, aber eine Gesamtheit? Das kann ich mir nicht vorstellen.“ Als die Versuchsleiterin Alexandra ein Bild mit mehreren Pfeilen mit gleicher Länge, Orientierung und Richtung vorlegt und sie fragt, ob diese Pfeile alle derselbe Vektor wären, antwortet sie: „Nein! Wenn es ein und derselbe Vektor wäre, dann würde ja nur ein Vektor [gemeint: Pfeil] da sein“ (Hartmann 1993: 56). Andere SchülerInnen, wie zum Beispiel Natascha, geben eine ähnliche Antwort: „Nein, weil es sind ja mehrere Pfeile. Wenn ich sage, ein Vektor, dann müsste [sic] es eigentlich nur ein Pfeil sein. Das hier sind mehrere Vektoren.“ (Hartmann 1993: 56)

² Obwohl diese Studie bereits vor mehr als 20 Jahren durchgeführt wurde, sind die Ergebnisse auch noch heute von Bedeutung, da ähnliche Probleme bestehen bleiben können.

Auch Jarmer (1995) stellt im Rahmen ihrer Studie die Frage, ob ein Vektor die Gesamtheit von allen Pfeilen mit selber Richtung, Länge und Orientierung sei. Von 99 SchülerInnen, in deren Unterricht Vektoren als Pfeilklassen eingeführt worden sind, stimmen nur 48 SchülerInnen zu (Jarmer 1995: 34). In jener Gruppe von SchülerInnen, bei denen Vektoren als n-Tupel eingeführt worden sind, stimmen nur 17 von 140 eindeutig zu. Hier gibt es allerdings viele ausweichende und verwirrende Antworten, die nicht eindeutig zugeordnet werden können (Jarmer 1995: 36-39). Es wird also auch hier gezeigt, dass SchülerInnen Probleme mit dem Verständnis und der Anwendung von Vektoren als Pfeilklassen haben.

4.1.2 Beispiele aus Schulbüchern

Bereits in Laub et al. (1967: 138) und in Laub et al. (1978: 197) findet man beispielsweise das Pfeilklassenmodell, wobei es in diesem Fall mit dem Translationsmodell kombiniert ist. In Laub et al. (1978: 197) wird zuerst eine Abbildungsvorschrift definiert und diese Definition führt zur Definition eines Vektors:

Definition 70:

Eine Äquivalenzklasse gleich langer, paralleler und gleich orientierter Pfeile der Ebene heißt Vektor der Ebene.

Diese Herangehensweise an das Pfeilklassenmodell der Vektoren fällt eindeutig in die erste Kategorie der beiden oben eingeführten Kategorien von Wittmann (2003: 68). Vektoren werden hier zwar als Äquivalenzklassen definiert, der Begriff der Äquivalenzrelation wird aber auch entsprechend des damals gültigen Lehrplans erläutert. Sobald die Vektoren im $\mathbb{R}^3$ auf dieselbe Art und Weise eingeführt werden, wird noch einmal betont, dass zwei Vektoren gleich sind, „wenn sie dieselbe Klasse von Pfeilen darstellen“ (Laub et al. 1978: 213).

Auch das Schulbuch von Thorwartl, Wagner & Wagner (1991) basiert auf dem Pfeilklassenmodell. Im Gegensatz zu Laub et al. (1967 & 1978) ist das Translationsmodell allerdings nicht mehr von Bedeutung, sondern es ist rein geometrisch von einfachen Pfeilen die Rede. Folgende Definition ist in diesem Schulbuch zu finden (Thorwartl, Wagner & Wagner 1991: 160):

Vektor:

Die Menge aller gleich langer, gleichgerichteter und gleichorientierter Pfeile wird Vektor genannt. Ein Vektor besteht also aus unendlich vielen gleichlangen, gleichgerichteten und gleichorientierten Pfeilen.

Stellvertretend für den Vektor wird z.B. $\overrightarrow{PP'}$ *Repräsentant* (Vertreter) des Vektors $\vec{v}$ genannt.

Bezeichnungsweise:

- Vektoren werden durch Kleinbuchstaben mit einem Pfeil angeschrieben ($\vec{v}$)
- $\overrightarrow{PP'}$, $\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{GG'}$, ... Angabe durch *Anfangspunkt* (*Schaft*, z.B. P) und *Endpunkt* (*Spitze*, z.B. P') eines Repräsentanten des Vektors.

Auffallend ist bei dieser Definition, dass zwar die Eigenschaften wie oben übernommen werden, aber das Wort „Äquivalenzklasse“ durch den Begriff „Menge“ ersetzt worden ist. Trotz allem werden einzelne Vertreter, wie bei Laub et al. (1967 & 1978), als „Repräsentanten“ bezeichnet. Des Weiteren scheint die Definition und zugehörige Erklärung um einiges detaillierter und für SchülerInnen sicher besser nachvollziehbar zu sein, vor allem durch diesen Zusatz: „Ein Vektor besteht also aus unendlich vielen gleichlangen, gleichgerichteten und gleichorientierten Pfeilen“ (Thorwartl, Wagner & Wagner 1991: 160). Wichtig ist außerdem, dass die Begriffe Länge, Richtung und Orientierung direkt vor der Definition mit Hilfe von Skizzen erläutert werden, um vor allem Verwirrungen bei letzteren beiden Begriffen vorzubeugen. Auch dies war bei Laub et al. (1967 & 1978) noch nicht der Fall. Überdies wird hier eine Schreibweise beschrieben, die zwischen einem Vektor nach dieser Definition und einem Repräsentanten unterscheidet. Dies wirkt zu Beginn etwas kompliziert, da im Regelfall in der Schule oft nur von Repräsentanten die Rede ist. Deswegen merkt das Buch direkt nach der Definition an, dass man für $\vec{v} = \overrightarrow{PP'}$ schreibt, „d.h. man unterscheidet nicht zwischen dem Vektor (unendliche Menge gleicher Pfeile) und einem seiner Repräsentanten“ (Thorwartl, Wagner & Wagner 1991: 160).

Auch im Schulbuch *Klar² Mathematik 5* von Binder, Denninger & Urban-Woldron (2010: 186) findet man die Definition ähnlich zu Thorwartl, Wagner & Wagner (1991):

Unter einem **Vektor** versteht man die Menge aller **gleich langen, gleich orientierten und parallelen** Pfeile.

Wie Laub et al. (1978: 197) sprechen auch Binder, Denninger & Urban-Woldron (2010: 186) von parallelen Pfeilen anstatt die Richtung beziehungsweise den Begriff ‚gleich gerichtet‘ zu verwenden, um Verwirrungen bezüglich dieses Begriffs zu vermeiden. In dieser Definition ist nun weder der Begriff ‚Äquivalenzklasse‘ noch der Begriff ‚Repräsentant‘ anzufinden. Nach der Definition steht folgende Anmerkung: „Alle zu einem Vektor $\vec{a}$ gehörenden Pfeile besitzen dieselbe Koordinatendarstellung“ (Binder, Denninger & Urban-Woldron 2010: 186). Begründet wird diese Anmerkung dadurch, dass insbesondere geometrische Aufgaben auf Grund dieser Eigenschaft einfacher gelöst werden können. Anschließend wird dies anhand eines Beispiels

gefestigt, indem gezeigt wird, dass in einem Parallelogramm $ABCD$ die Pfeile $\overrightarrow{BA}$ und $\overrightarrow{CD}$ „zum selben Vektor gehören“ (Binder, Denninger & Urban-Woldron 2010: 186). Interessant ist, dass dieser Definition und diesem Beispiel einige Seiten an Beschreibung von Punkten und Pfeilen im kartesischen Koordinatensystem vorangehen. Der Begriff ‚Vektor‘ wird in diesen vier Seiten davor kein einziges Mal erwähnt, obwohl bereits die „Spitze minus Schaft“-Regel (Binder, Denninger & Urban-Woldron 2010: 183) und die „Distanzformel [für die] Länge eines Pfeiles“ (Binder, Denninger & Urban-Woldron 2010: 184) eingeführt werden.

Ähnlich wie bei Binder, Denninger & Urban-Woldron (2010) wird im Schulbuch *Dimensionen Mathematik 5* von Bleier et al. (2014: 268-270) vorerst der Fokus auf die Darstellung von Zahlenpaaren als Punkte und Pfeile gelegt, bevor der Vektorbegriff als solcher eingeführt wird. Vektoren werden hier zuerst folgendermaßen auf geometrische Art und Weise definiert (Bleier et al. 2014: 271):

Definition

Die **Menge aller Pfeile der Zeichenebene**, die **gleich lang**, **parallel** und **gleich orientiert** sind, wird als **Vektor** bezeichnet.

Ein Vektor ist die Menge aller Pfeile der Zeichenebene, die das gleiche geordnete Zahlenpaar als Koordinatendarstellung besitzen. Ein Element dieser Menge heißt **Repräsentant** des Vektors.

Diese Definition ähnelt der aus dem Schulbuch *Klar² Mathematik 5* sehr, verwendet aber den zusätzlichen Aspekt der Zeichenebene und reduziert damit die Definition auf Vektoren im $\mathbb{R}^2$, wie es der Lehrplan vorsieht. Außerdem taucht hier wieder der Begriff des Repräsentanten auf. Für die Schreibweise von Vektoren wählen diese Autoren denselben Ansatz wie bereits Thorwartl, Wagner & Wagner (1991: 160). Dieses Buch stellt aber nicht nur eine geometrische Definition zur Verfügung, sondern liefert im weiteren Verlauf eine algebraische Definition im Sinne des Modells der n-Tupel.

4.2 Das Modell der Ortsvektoren

4.2.1 Allgemeines

Das Modell der Ortsvektoren ähnelt dem Modell der Punkte, welches Vektoren als Punkte deutet. Im Modell der Ortsvektoren werden Punkte nun durch Pfeile, welche vom Ursprung zum Punkt führen, dargestellt. Ein Punkt A wird also durch den Pfeil $\overrightarrow{OA}$ dargestellt, wobei O den Ursprung bezeichnet (Hartmann 1993: 115-116).

Die Rechenoperationen wie die Addition zweier Vektoren und die Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar sind im Ortsvektormodell durchaus möglich zu begründen. Der Nachweis der Rechengesetze gestaltet sich in diesem Modell weiterhin schwierig, obwohl zumindest die Notwendigkeit, die Unabhängigkeit der Wahl der Repräsentanten nachzuweisen, wegfällt. Laut Hartmann (1993: 116) treten die größten Probleme mit diesem Modell im Zusammenhang mit „freien Vektoren“, beispielsweise Richtungsvektoren von Geraden, auf. Anstatt der üblichen Parameterdarstellung der Geraden mit $g: X = P + t \cdot \vec{g}$, müsste man, wie in Abbildung 2³ ersichtlich, folgende Form angeben: $g: \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + t \cdot \vec{g}$.

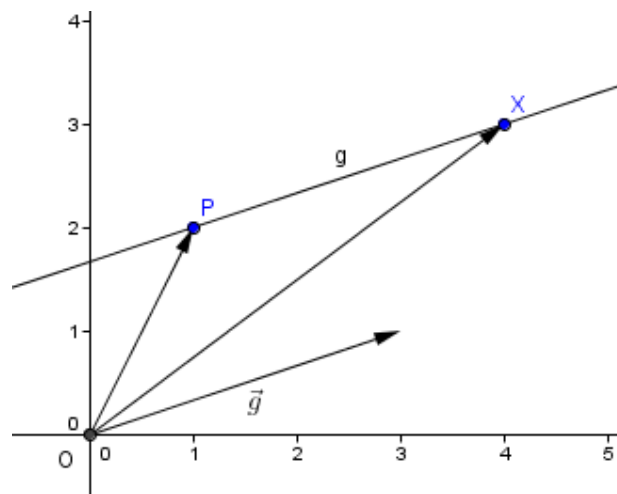


Abbildung 2: Parameterdarstellung der Gerade

Hartmann (1993: 116) argumentiert hier, dass eine Darstellung dieser Art „nicht sehr sinnvoll [ist], weil man sich üblicherweise einen Richtungsvektor auf der Geraden vorstellt.“

Malle (2007: 87) bezeichnet die Deutung und Verwendung von Ortsvektoren „in der Analytischen Geometrie der Schule [als] schlicht und einfach überflüssig“ beziehungsweise sogar als „schädlich“. Dies begründet er anhand eines Beispiels, nämlich der Herleitung der Formel für die Berechnung des Schwerpunkts in einem Dreieck, welche in Abbildung 3 (Malle 2007: 88) dargestellt wird, wobei vorausgesetzt wird, dass bekannt ist, dass „der Schwerpunkt jede Schwerelinie im Verhältnis 1:2 teilt“.

³ Diese Abbildung wurde von der Verfasserin der Diplomarbeit mit GeoGebra erstellt.

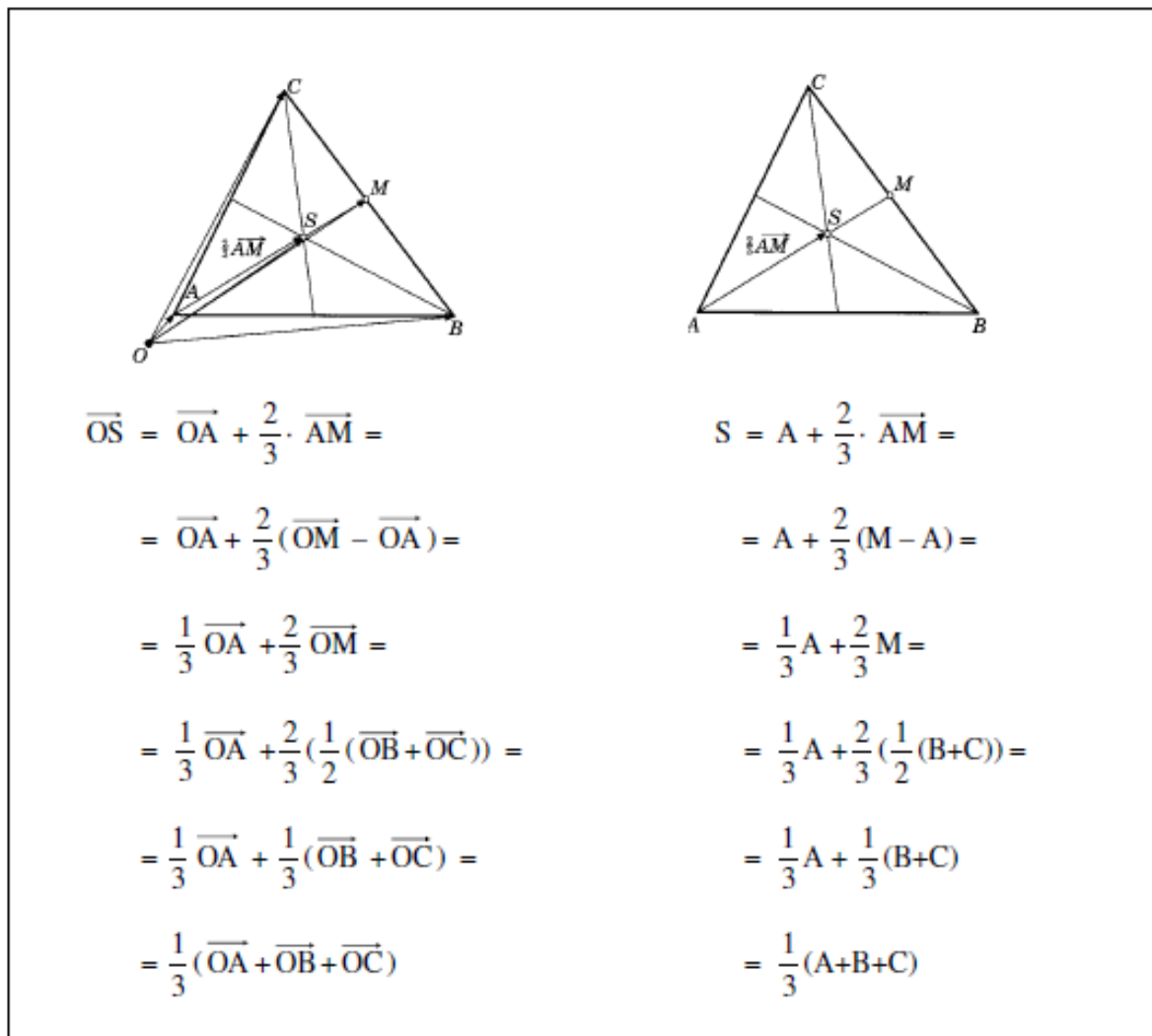


Abbildung 3: Herleitung des Schwerpunkts – ein Vergleich (Malle 2007: 88)

Malle (2007: 88) beschreibt anschließend mehrere Nachteile des Ortsvektormodells anhand dieses Beispiels. Wie man leicht erkennen kann, ist die linke Skizze auf Grund der Ortsvektoren, die die Eckpunkte des Dreiecks und den Mittelpunkt M des Vektors $\overrightarrow{BC}$ darstellen, um einiges unübersichtlicher als die rechte Skizze. Auch die Rechnung auf der rechten Seite sieht auf Grund der Punktschreibweise im Gegensatz zur Pfeilschreibweise einfacher und unkomplizierter aus. Außerdem erhält man am Ende der Rechnung mit Ortsvektoren natürlich wieder einen Ortsvektor $\overrightarrow{OS}$, den man dann erst als Punkt S deuten und umschreiben muss. Schließlich weist Malle (2007: 88) auch darauf hin, dass die Rechnung mit Hilfe von Ortsvektoren „einem gekünstelten, unnatürlichen Denken“ entspricht, denn „[n]iemand denkt bei der Lösung dieses Problems an die Ortspfeile [...], sondern man denkt in Punkten und Pfeilen, was die rechte Rechnung perfekt wiedergibt.“ Hier vergleicht Malle die Verwendung der Ortsvektoren mit einem Beispiel aus dem Leben, welches auf verständliche

und nachvollziehbare Weise zeigt, dass die Verwendung von Ortsvektoren übermäßig kompliziert ist:

Wenn man von Salzburg nach Linz fährt, fährt man auch nicht zuerst vom Ursprung Wien nach Salzburg, dann von Salzburg nach Linz und dann wieder von Ursprung Wien nach Linz, sondern mit Verlaub gesagt: Man fährt schlicht von Salzburg nach Linz. (Malle 2007: 88)

Daher plädiert Malle eindeutig für die Vermeidung von der Deutung von Punkten als Ortsvektoren, da diese die SchülerInnen nur unnötig verwirren würde.

4.2.2 Beispiele aus Schulbüchern

Das Modell der Ortsvektoren ist in keinem Schulbuch als einziges Modell zu finden, sondern Ortsvektoren werden oft eher einfach zusätzlich definiert. Auch in Laub et al. (1978) werden Ortsvektoren zwar eingeführt, aber nicht als Hauptmodell für die Einführung des Vektorbegriffs verwendet. Ortsvektoren werden in Laub et al. (1978: 213) folgendermaßen definiert:

Wählt man im Raum (in der Ebene) einen festen Punkt O , so ist jeder Punkt P des Raumes (der Ebene) durch den Pfeil $\overrightarrow{OP}$ eindeutig festgelegt.

Der Pfeil $\overrightarrow{OP}$ wird als Ortsvektor $\mathbf{x}$ des Punktes P bezüglich des Punktes O bezeichnet: $\mathbf{x} = \overrightarrow{OP}$.

Auffallend ist hier, dass nicht wie üblich der Bezug zum Ursprung eines Koordinatensystems hergestellt wird, sondern ein allgemeiner fester Punkt O gewählt wird. In den anschließenden Kapiteln des Lehrbuchs werden aber dann größtenteils keine Ortsvektoren für die Erklärungen und Beispiele angenommen. Insbesondere Skizzen, die zur Darstellung etwaiger Beispiele und Erklärungen dienen, vermeiden die oben beschriebene Problematik der Unübersichtlichkeit bei Skizzen von beispielsweise einem Parallelepiped (Laub et al. 1978: 218). Bei der Darstellung der verschiedenen Lagebeziehungen zweier Geraden im Raum wird diese Unübersichtlichkeit allerdings noch einmal deutlich (Laub et al. 1978: 242).

Auch im Falle der Einführung der Parameterdarstellung einer Geraden behalten Laub et al. (1978: 237) die oben beschriebene, für SchülerInnen eher schwerer nachvollziehbare Darstellung mit $g: x = x_1 + t \cdot a, t \in \mathbb{R}$ und $\mathbf{x}, \mathbf{x}_1$ Ortsvektoren bei.

Auch Reichel et al. (2002) verlassen sich nicht voll und ganz auf das Ortsvektormodell, verwenden es aber zur Einführung von Vektoren und für die Überleitung zu Vektoren als Pfeile. Nach einer kurzen Wiederholung der geordneten Zahlenpaare, welche Punkte im kartesischen Koordinatensystem beschreiben können, weisen Reichel et al. (2002: 250) auf die Möglichkeit der Ortspfeile hin:

Die kartesischen Koordinaten x_p und y_p eines Punktes P lassen sich nicht nur als Beschreibung eines *Ortes* auffassen, sondern ebenso als Beschreibung des *kürzesten Weges vom Ursprung O zum Punkt P* , genannt **Ortspfeil** $\overrightarrow{OP}$. [...]

Ersichtlich legen nämlich die Zahlen x_p und y_p als *orientierte* Seitenlängen das *Koordinatenrechteck* und über dessen *orientierte* Diagonale den zugehörigen Ortspfeil fest.

Hier wird, im Vergleich zu Laub et al. (1978), kein allgemeiner Punkt O , sondern der Ursprung als Bezugspunkt gewählt. Außerdem wird eine genauere Erklärung zu der Bedeutung und Darstellung des Ortspfeils erbracht und auf den Zusammenhang mit dem Koordinatenrechteck hingewiesen.

4.3 Das Translationsmodell

4.3.1 Allgemeines

Das Modell der Translationen basiert auf folgender Definition (Hartmann 1993: 117):

Eine Abbildung der Ebene (des Raumes) nach sich heißt Translation, wenn für alle Punkte X, Y der Ebene (des Raumes) gilt: $X, f(X), f(Y), Y$ bilden ein Parallelogramm.

Mit Hilfe dieser Definition werden dann die Summe zweier Translationen, die identische und die inverse Abbildung, der Betrag eine Translation und Ähnliches definiert, sowie Rechengesetze nachgewiesen und motiviert.

Wie bei den vorhergehenden Modellen ergibt sich das Problem, dass der Nachweis vieler Rechengesetze mit großem Aufwand verbunden ist. Wie beim Pfeilklassenmodell müsste man in vielen Fällen die Unabhängigkeit von der Wahl der Repräsentanten beweisen (Hartmann 1993: 120). Des Weiteren stellt sich insbesondere beim skalaren Produkt und beim vektoriellen Produkt die Frage, wie man diese anschaulich motivieren könnte (Hartmann 1993: 121). Hartmann (1993: 120-121) hinterfragt außerdem, ob sich SchülerInnen bei Verschiebungen nicht eher die Verschiebung eines Objekts, beispielsweise eines Dreiecks, anstatt einer Verschiebung der ganzen Ebene (des ganzen Raums) vorstellen. In der Physik ist das Translationsmodell auch keinesfalls ausreichend, da man viele physikalische Zusammenhänge, die als Vektoren dargestellt werden können, kaum als Translationen deuten kann (Hartmann 1993: 121).

Insgesamt ist zu diesem Modell zu sagen, dass es für die Anwendung in der Schule eher ungeeignet ist, da Funktionen generell „nicht ganz einfache Denk- bzw. Rechenobjekte“ (Hartmann 1993: 121) sind.

4.3.2 Beispiele aus Schulbüchern

Wie bereits in Abschnitt 4.1.2 erwähnt, verwendet Laub et al. (1978) unter anderem das Translationsmodell für die Einführung von Vektoren. Folgende Definition beschreibt die Abbildungsvorschrift, die folglich zur Definition der Vektoren als Pfeilklassen führt (Laub et al. 1978: 197):

Definition 69:

Eine Abbildung einer Ebene ε auf sich heißt Schiebung, wenn jedem Punkt P der Ebene ein Bildpunkt P_1 so zugeordnet wird, daß [sic] alle Pfeile $\overrightarrow{PP_1}$ gleich lang, parallel und gleich orientiert sind.

Diese Definition unterscheidet sich zwar ein wenig von der oben angegebenen Definition einer Translation, basiert aber auf demselben Prinzip der Verschiebung.

Schon Laub et al. (1967: 138) verwenden das Prinzip der Schiebung beziehungsweise Translation, um den Vektorbegriff zu erklären. Demnach berechnet man die Punkte A' , B' und C' indem man den Pfeil v jeweils an die Punkte A , B und C anhängt. Definiert werden Vektoren aber dann mit Hilfe des Pfeilklassenmodells.

Auch das Schulbuch *Klar² Mathematik 5* von Binder, Denninger & Urban-Woldron (2010: 191) nimmt die Schiebung zwar nicht als grundsätzliches Modell an, um Vektoren zu definieren, greift aber auf dieses Modell zurück, um beispielsweise die Vektoraddition zu erklären. Laut diesem Buch beschreibt ein Vektor aber „nicht die Verschiebung eines einzelnen Punktes, sondern unendlich vieler Punkte, also der gesamten Zeichenebene, um dieselbe Strecke in dieselbe Richtung“ (Binder, Denninger & Urban-Woldron 2010: 191).

4.4 Das algebraische Modell und dessen geometrische Deutung

4.4.1 Literatur und Studien

Den obigen Modellen basierend auf geometrischen Ansätzen steht der rein algebraische Ansatz der n -Tupel entgegen. In diesem Modell betrachtet man Vektoren als geordnete n -Tupel der Form $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ mit $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$. Bei der grundsätzlichen Einführung der Vektoren als Zahlentupel kann man sich zu Beginn einfach auf Zahlenpaare beschränken, da viele Rechenoperationen und Beweise für Rechengesetze für Zahlentripel und schließlich Zahlentupel aus dem $\mathbb{R}^n$ analog funktionieren (Malle 2007: 80).

Algebraisch ist die Notwendigkeit von Zahlentupeln insofern sehr leicht motivierbar, als dass viele Sachverhalte heutzutage mit zwei oder mehr Zahlen beschrieben werden, wie

beispielsweise die Länge und Breite eines Grundstücks oder die Größe und das Gewicht eines Menschen. Auch die Rechenoperationen lassen sich einfach erklären und motivieren. Dass die Addition und Subtraktion zweier Vektoren sowie die Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar koordinatenweise erfolgen muss, lässt sich durch einfache Anwendungsbeispiele zeigen. In Malle (2007: 80) ist folgendes Beispiel zur Demonstration und Motivation der Rechenoperationen zu finden:

Wenn $A = (120 / 150)$ der Vektor ist, der die Ausgaben von Anna im Urlaub für Flug bzw. Hotel angibt, und $B = (130 / 170)$ der entsprechende Ausgabenvektor für Berta, dann ist es nahe liegend, für den Ausgabenvektor beider Mädchen zusammen zu schreiben:

$$A + B = (120 + 130 / 150 + 170) = (250 / 320)$$

Wenn inzwischen alles um 10% teurer geworden ist, liegt es nahe, für den neuen Ausgabenvektor von Anna zu schreiben:

$$A' = 1,1 \cdot A = 1,1 \cdot (120 / 150) = (1,1 \cdot 120 / 1,1 \cdot 150) = (132 / 165)$$

Generell kann man hierbei die Zeilen- oder Spaltenschreibweise nach Belieben und Zweckmäßigkeit wählen (Hartmann 1993: 122).

Allgemein definiert man dann die Addition zweier Vektoren beziehungsweise die Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar folgendermaßen:

Allgemein definiert man für $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$:

$$(a_1 / a_2) + (b_1 / b_2) := (a_1 + b_1 / a_2 + b_2) \text{ und } r \cdot (a_1 / a_2) := (r \cdot a_1 / r \cdot a_2)$$

Diese Rechengesetze sind einfach nachzuweisen, indem man die Gesetze für Vektoren auf jene Axiome, die für die reellen Zahlen gelten, zurückführt. Laut Malle (2007: 80) ist das jedoch in der Schule nicht einmal notwendig, da der Begriff des Vektorraums und damit seine axiomatische Behandlung im derzeitigen Lehrplan von 2004 nicht vorgeschrieben sind. Malle schlägt hier einen einfacheren und praktischeren Ansatz vor, indem man Rechnungen mit Vektoren als mehrere Rechnungen mit reellen Zahlen, die auch getrennt betrachtet werden können, interpretiert. Dass diese Rechengesetze in den reellen Zahlen gelten, wird in der Schule zu diesem Zeitpunkt als selbstverständlich angesehen. Vektoren werden nun als Hilfsmittel betrachtet, durch die man die Möglichkeit hat, mehrere Rechnungen gleichzeitig zu beschreiben, wie im Falle von Annas Ausgabenvektor aus obigem Beispiel.

Obwohl Studien zeigen, dass dieser algebraische Ansatz für SchülerInnen meist leicht verständlich und nachvollziehbar ist, reicht dieser nicht aus, um Analytische Geometrie zu

erklären und betreiben zu können (Malle 2007: 81). Hartmann (1993: 126) weist darauf hin, dass nach einer algebraischen Einführung von Vektoren eine sinnvolle und verständliche Beziehung zu der Geometrie hergestellt werden muss, um SchülerInnen den Umgang mit der Analytischen Geometrie zu ermöglichen und so einfach wie möglich zu machen. Ein rein algebraisches Modell der Vektorrechnung ist auch in keinem der bekannten in Österreich approbierten Schulbücher anzufinden.

In einem heute gängigen Modell wird das Modell der n -Tupel als Grundlage für die Einführung des Vektorbegriffs herangezogen und die geometrische Deutung dieser Vektoren als Erweiterung gesehen, die das Betreiben von Analytischer Geometrie ermöglicht. Vektoren werden also als Elemente aus dem $\mathbb{R}^n$ eingeführt. Das bedeutet laut Bürger et al. (1980: 172):

Geometrische Objekte wie Punkte und Pfeile treten selbst nicht als Vektoren auf, sie dienen aber einerseits zur *Veranschaulichung* von Vektoren, umgekehrt werden sie durch Vektoren *arithmetisch erfaßt* [sic] (bei Pfeilen allerdings nur partiell, dh. ihre Lage wird nicht erfaßt [sic]).

Malle (2007: 85) beschreibt dies auf eine ähnliche Art und Weise, wobei auch er auf die mögliche geometrische Deutung von Vektoren sowohl als Punkte als auch als Pfeile hinweist. Dabei unterscheidet er aber zwischen der bijektiven Zuordnung zwischen Vektoren und Punkten und der nicht bijektiven Zuordnung zwischen Vektoren und Pfeilen, da er auf die Einführung der Vektoren über Pfeilklassen verzichtet. Laut Malle (2007: 85) gilt also:

Jedem Vektor (Zahlenpaar) entspricht genau ein Punkt der Ebene. Umgekehrt entspricht jedem Punkt der Ebene genau ein Vektor (Zahlenpaar).

Jedem Vektor (Zahlenpaar) entsprechen unendlich viele Pfeile der Ebene (die aber, wenn man vom Nullvektor absieht, alle parallel, gleich lang und gleich gerichtet sind). Umgekehrt entspricht jedem Pfeil der Ebene genau ein Vektor (Zahlenpaar).

Für die Bezeichnung von Vektoren schreibt Malle (2007: 85) vor, Großbuchstaben $A, B, C, \dots$ für jene Vektoren zu wählen, die als Punkte gedeutet werden, Kleinbuchstaben $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \dots$ für jene, die als Pfeile gedeutet werden und beispielsweise $\overrightarrow{AB}$, wenn der Vektor als Pfeil mit Startpunkt A und Endpunkt B interpretiert wird. Dies ist auch noch heute in vielen Schulbüchern, wie beispielsweise bei Malle et al. (2010a), so üblich.

Auch die Rechenoperationen werden algebraisch definiert und anschließend geometrisch gedeutet. Die Addition zweier Vektoren kann beispielsweise auf verschiedene Arten interpretiert werden. Wittmann (2003: 71) nennt drei Möglichkeiten der Vektoraddition: die Punkt-Pfeil-Darstellung (Abbildung 4), die Pfeil-Pfeil-Darstellung (Abbildung 5) und die Punkt-Punkt-Darstellung, wobei letztere für die Schule nicht relevant sei.

Malle (2007: 86) definiert die Vektoraddition als Punkt-Pfeil-Darstellung folgendermaßen:

Wird ein Vektor aus $\mathbb{R}^2$ durch einen Punkt in der Ebene und ein zweiter Vektor aus $\mathbb{R}^2$ durch einen an diesen Punkt angehängten Pfeil dargestellt, so entspricht die Summe der beiden Vektoren dem Endpunkt des angehängten Pfeils.

Abbildung 4 zeigt dies anschaulich:

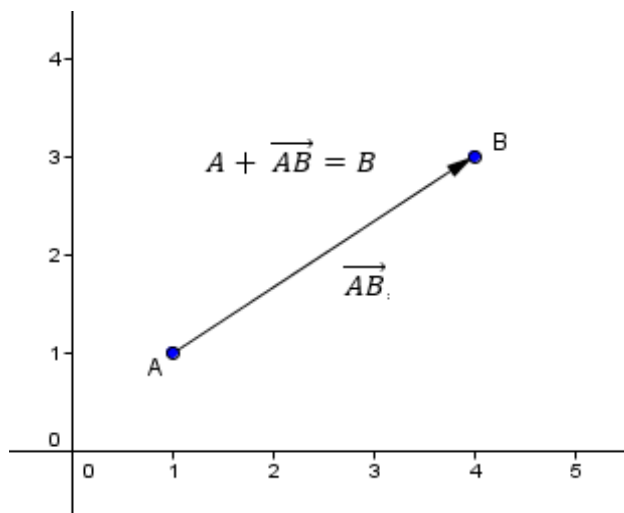


Abbildung 4: Vektoraddition als Punkt-Pfeil-Darstellung (Malle 2007: 86)

Die Pfeil-Pfeil-Darstellung hingegen definiert Malle (2007: 86) mit folgenden Worten:

Werden zwei Vektoren aus $\mathbb{R}^2$ durch aneinander gehängte Pfeile in der Ebene dargestellt, so entspricht die Summe der beiden Vektoren dem Pfeil vom Anfangspunkt des ersten Pfeils zum Endpunkt des zweiten Pfeils.

Abbildung 5 zeigt die Pfeil-Pfeil-Darstellung der Vektoraddition:

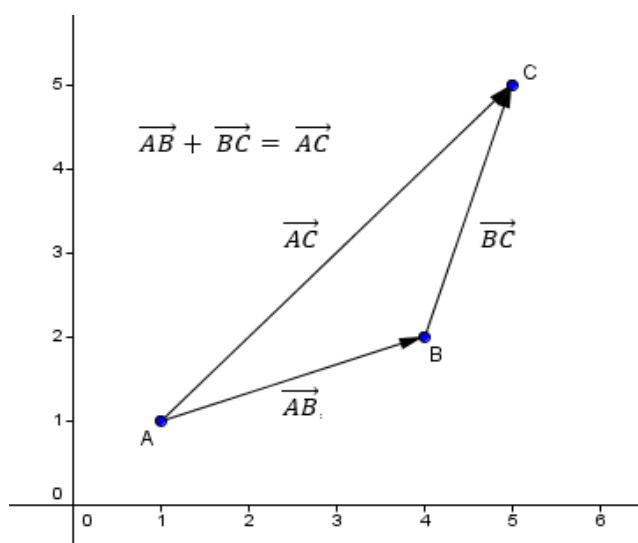


Abbildung 5: Vektoraddition als Pfeil-Pfeil-Darstellung (Malle 2007: 86)

Diese beiden Deutungen der Vektoraddition im $\mathbb{R}^2$ sind vergleichbar mit den möglichen geometrischen Deutungen der Addition von reellen Zahlen. In Abbildung 6 aus Malle

(2007: 86) wird die Addition zweier reeller Zahlen ebenfalls auf zwei vergleichbare Arten geometrisch dargestellt:

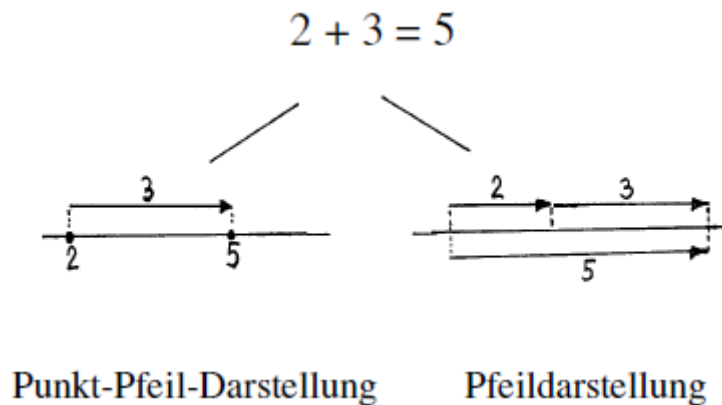


Abbildung 6: Geometrische Darstellungen der Addition zweier reeller Zahlen (Malle 2007: 86)

Abschließend muss noch auf einen Kritikpunkt bezüglich der Schreibweise der Punkt-Pfeil-Darstellung der Vektoraddition hingewiesen werden. Manch einer würde argumentieren, dass in der Gleichung $A + \overrightarrow{AB} = B$ Punkte und Pfeile addiert werden und das doch nicht möglich sei. Malle (2007: 87) behauptet dazu: „Wer so argumentiert, hat das Konzept nicht verstanden.“ Er begründet dies damit, dass die Gleichung hier nur die Addition zweier Zahlenpaare darstellt und dies natürlich legitim sei. Dass diese Zahlenpaare geometrisch auf unterschiedliche Weise gedeutet werden, ändert nichts daran. Interessanterweise haben empirische Studien gezeigt, dass SchülerInnen dieses Verständnisproblem gar nicht haben, sondern eher nur LehrerInnen, die nach älteren Lehrbüchern unterrichtet worden sind (Malle 2007: 87).

Es wird oft eingewandt, dass die algebraische Einführung des Vektorbegriffs zwar für SchülerInnen verständlich und leicht zu motivieren sei, aber die geometrische Deutung als Punkte und Pfeile schlussendlich in der Schule überhandnimmt. Malle (2007: 89) bezeichnet diese Entwicklung, durch die ein Vektor aus Sicht der SchülerInnen „nach und nach zu einem geometrischen Objekt wird“ als „schleichende Geometrisierung“. Auch Wittmann (2003: 73) spricht von einer „sprachliche[n] Identifizierung“ auf Grund der geometrischen Deutung des algebraischen Konzepts. Bürger et al. (1980: 179) rechtfertigen Kritik in Anbetracht dessen, dass dabei teilweise fälschliche Bezeichnungen von Seiten der SchülerInnen auftauchen, folgendermaßen:

Wir halten diese sprachlichen Vereinfachungen für berechtigt und für keine Verfälschung der Situation. Es ist auch im täglichen Leben üblich, Gegenstände mit ihren Darstellungen zu identifizieren. Man zeigt auf ein Bild und sagt: ‚Das ist Gauß‘. Oder man weist auf eine Landkarte und sagt: ‚Hier liegt Wien‘.“

Trotz allem zeigt Malle (2007: 89-90) auf, dass man in Fällen von Verwirrungen der Begriffe, die zu Verständnisschwierigkeiten führen, den Unterschied zwischen der algebraischen Definition und den geometrischen Darstellungsmöglichkeiten erklären muss.

Die Studie von Hartmann (1993: 73) zeigt beispielsweise, dass SchülerInnen Vektoren auch damals schon, vor etwas mehr als 20 Jahren, oft als etwas Arithmetisches **und** etwas Geometrisches deuten. Eine Schülerin, Natascha, behauptet: „Ein Vektor ist etwas Arithmetisches und etwas Geometrisches. Also man kann Vektoren berechnen und auch damit zeichnen. [...] Ich kann z. B. die Länge eines Vektors berechnen durch Addieren und Subtrahieren oder zeichnen...also Figuren darstellen.“. Hier verwendet sie sogar explizit das Wort „darstellen“. Ob sie jedoch einen Vektor grundsätzlich als ein arithmetisches Objekt, das man geometrisch darstellen kann, interpretiert, ist fraglich.

Malle (2007: 89-90) weist ebenso auf dieses Problem hin und nennt folgendes Beispiel: Wenn ein Schüler oder eine Schülerin Schwierigkeiten hat, in einem Parallelogramm $ABCD$, dargestellt durch Vektoren, zu erkennen und zu verstehen, dass $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$ gilt, dann liegt hier eindeutig ein Fall vor, wo der Schüler oder die Schülerin aufgeklärt werden muss, dass diese beiden Pfeile durch dasselbe Zahlenpaar beschrieben werden können. Es müsste hier verdeutlicht werden, dass $\overrightarrow{BC}$ und $\overrightarrow{AD}$ nur zwei Möglichkeiten zur geometrischen Darstellung von ein und demselben Zahlenpaar sind. Dieses Missverständnis muss natürlich dringend aufgeklärt werden, da es sonst bei vielen grundlegenden Aufgaben zu Problemen kommen kann.

Eine solche Aufgabe hat Jarmer (1995: 66) in ihrer Studie berücksichtigt:

Von einem Parallelogramm sind drei Eckpunkte gegeben. Berechne denn vierten! (Fertige eine Skizze an und erläutere deinen Rechengang!)

$$A = (-1/2), B = (0/3), C = (7/-1)$$

19% der Pfeilklassengruppe bestehend aus 99 SchülerInnen und 17% der n-Tupelgruppe bestehend aus 140 SchülerInnen waren aus diversen Gründen nicht in der Lage diese doch recht grundlegende Aufgabe zu lösen. Dies könnte unter anderem darauf zurückzuführen sein, dass das gegebene Parallelogramm nicht, wie üblich, gegen den Uhrzeigersinn beschriftet ist. Auch wenn es natürlich verschiedene Gründe geben kann, wieso SchülerInnen bei diesem Beispiel Probleme hatten, könnte doch hier unter anderem auch das fehlende Verständnis, dass $\overrightarrow{BC}$ und $\overrightarrow{AD}$ Darstellungen desselben Zahlenpaars sind, eine Rolle spielen (Jarmer 1995: 66).

Wie bereits erwähnt, zeigt Hartmann (1993) in ihrer Studie, dass die meisten SchülerInnen sowohl den arithmetischen, als auch den geometrischen Aspekt von Vektoren erkennen und verstehen. Außerdem kann man auf Grund der verschiedenen Aussagen der SchülerInnen annehmen, dass der algebraische Teil der Vektorrechnung zwar behandelt wird, der Fokus im Unterricht schlussendlich aber hauptsächlich auf geometrischen Aufgaben liegt (Hartmann 1993: 76). Dies wird vor allem bei folgendem Beispiel (Hartmann 1993: 76) deutlich, welches einfach arithmetisch gelöst werden kann. Die SchülerInnen suchen aber hartnäckig nach geometrischen Lösungen.

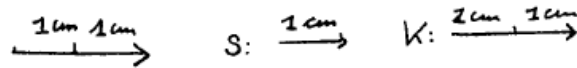
Bei den vier Spielen eines Fußballcups wurden von folgenden Spielern Tore geschossen:

1. Spiel: Müller (2), Schmid (1), Kaiser (2)
2. Spiel: Maier (3), Schmid (2), Eder (1)
3. Spiel: Müller (1), Eder (2), Schmid (1)
4. Spiel: Kaiser (4)

Ordne jedem Spieler einen Vektor zu, der angibt, wie viele Tore er in jedem Spiel geschossen hat.

Alle SchülerInnen bis auf eine scheitern daran, die Vektoren als Quadrupel anzuschreiben und so Vektoren für jeden Spieler aufzustellen. Jene, die diese Aufgabe nicht bewältigen können, wählen allesamt einen geometrischen Ansatz. Zwei SchülerInnen, Alexandra und Sandra, versuchen zum Beispiel Vektoren aufzuzeichnen, deren Länge von der Anzahl der geschossenen Tore abhängt, wobei die Richtung der gezeichneten Pfeile irrelevant ist beziehungsweise in Alexandras Fall waagrecht und in Sandras Fall senkrecht gewählt wird (Hartmann 1993: 77). Natascha wählt verschiedene Richtungen für die Pfeile, um verschiedene Anzahlen darzustellen. In allen Fällen, wie in Abbildung 7 ersichtlich, ist deutlich zu erkennen, dass der überwiegende Fokus auf geometrische Aufgaben in der Schule zu einer starken Vernachlässigung und teilweise sogar Ignoranz des algebraischen Vektors führen.

Alexandra (15)



Sandra (15)



Natascha (15)

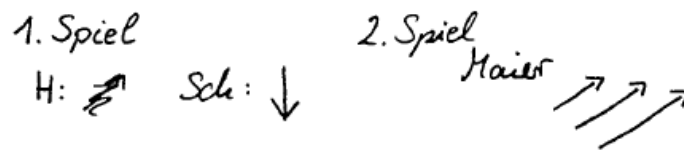


Abbildung 7: Alexandras, Sandras und Nataschas Lösungsversuche (Malle 2005c: 17)

Das Modell der n -Tupel mit deren geometrischen Deutung wird auch durch die in Liebscher et al. (2013: 9) vorgeschriebenen Grundkompetenzen AG 3.1 „Vektoren als Zahlentupel verständig einsetzen und im Kontext deuten können“ und AG 3.2 „Vektoren geometrisch (als Punkte bzw. Pfeile) deuten und verständig einsetzen können“ als Grundkompetenz für die standardisierte Reifeprüfung gesehen.

4.4.2 Beispiele aus Schulbüchern

Als eines der ersten Schulbücher der Mathematik in Österreich führen Bürger et al. (1978) Vektoren als n -Tupel ein und deuten die geometrische Darstellung von Vektoren im $\mathbb{R}^2$ und im $\mathbb{R}^3$ als zusätzliche Darstellungsmöglichkeit. Zuerst wird durch anschauliche Beispiele gezeigt, dass für die Beschreibung bestimmter Sachverhalte oft mehr als eine Zahl notwendig ist, wie beispielsweise die Länge und Breite eines Rechtecks oder Alter, Gewicht und Körpergröße einer Person (Bürger et al. 1978: 66). Nach einer Reihe von anschaulichen Beispielen mit expliziten Zahlen und Kontexten wird schließlich die Definition eines Vektors als Element aus dem $\mathbb{R}^n$ eingeführt (Bürger et al. 1978: 67). Erst dann, nach einigen wenigen Übungsbeispielen, werden die geometrischen Deutungsmöglichkeiten aufgezeigt. Hierbei ist anzumerken, dass die algebraische Einführung zwar gemacht wird, diese aber relativ kurz ausfällt und im weiteren Verlauf der Behandlung der Vektorrechnung nur hinsichtlich der Rechenoperationen aufgegriffen wird. Für die geometrische Darstellung werden anfangs lange nur Punkte behandelt, bis schließlich auch die Deutung von Vektoren als Pfeile eingeführt wird. Wie in

Malle (2007: 86) wird auch in diesem Buch (Bürger et al. 1978: 83-84) zwischen der Punkt-Pfeil-Addition und der Pfeil-Pfeil-Addition unterschieden. Es werden also, wie für dieses Modell im Gegensatz zu anderen typisch, sowohl Punkte, als auch Pfeile als Darstellungsmöglichkeiten von Vektoren miteinbezogen.

Fast alle der heute gängigen Schulbücher können ebenfalls zumindest überwiegend diesem Modell zugeordnet werden. Die Ausnahme bildet das Schulbuch *Klar² Mathematik 5* von Binder, Denninger & Urban-Woldron (2010), welches einen rein geometrischen Ansatz wählt und die algebraische Seite der Vektorrechnung gar nicht vorstellt und erklärt. Insbesondere die Schulbücher *Mathematik verstehen 5* von Malle et al. (2010a) und *Lösungswege Mathematik Oberstufe 5* von Freiler et al. (2015) folgen eindeutig dem hier vorgestellten Modell, da jeweils ein eigenes Kapitel zur algebraischen Einführung von Vektoren inkludiert wird, bevor auf die geometrischen Interpretationsmöglichkeiten eingegangen wird. *Thema Mathematik für die 5. Klasse AHS* von Brand et al. (2009) und *Dimensionen Mathematik 5* von Bleier et al. (2014) stellen zwar jeweils sowohl den algebraischen, als auch den geometrischen Teil der Vektorrechnung vor, sehen den geometrischen Ansatz jedoch nicht nur als Darstellungsmöglichkeit, sondern scheinen Vektoren auch tatsächlich als geometrische Elemente zu betrachten. Diese beiden Schulbücher folgen also nicht vollständig dem hier vorgestellten Modell. Inwiefern diese Schulbücher auf die algebraischen und geometrischen Aspekte der Vektorrechnung eingehen, wird in Kapitel 5.1 und 5.2 behandelt.

5 Die Vektorrechnung in aktuellen Schulbüchern in Hinblick auf die Grundkompetenzen für die zentrale Reifeprüfung

Da diese Arbeit unter anderem die Vektorrechnung im Rahmen der standardisierten Reifeprüfung beleuchtet, wird dieser Abschnitt nur die heute gängigen in österreichischen Schulen verwendeten Schulbücher näher beleuchten. Dabei soll ein besonderes Augenmerk auf bestimmte Aspekte der Vektorrechnung, die insbesondere für die Standardisierte Reifeprüfung (SRP) eine wichtige Rolle spielen, gelegt werden. Je nach Bedeutung, Gemeinsamkeiten und Unterschieden werden folgende Schulbücher mehr oder weniger detailliert diskutiert:

Für die fünfte Klasse:

- *Thema Mathematik für die 5. Klasse AHS* – Brand et al. (2009)
- *Klar² Mathematik 5* – Binder, Denninger & Urban-Woldron (2010)
- *Mathematik verstehen 5* – Malle et al. (2010a)
- *Dimensionen Mathematik 5* – Bleier et al. (2014)
- *Lösungswege Mathematik Oberstufe 5* – Freiler et al. (2015)

Für die sechste Klasse:

- *Thema Mathematik für die 6. Klasse AHS* – Brand et al. (2010)
- *Mathematik verstehen 6* – Malle et al. (2010b)
- *Klar² Mathematik 6* – Langensteiner et al. (2011)
- *Dimensionen Mathematik 6* – Bleier et al. (2015)

Das zugehörige Buch für die sechste Klasse von *Lösungswege Mathematik Oberstufe 5* (Freiler et al. 2015) kann hier noch nicht betrachtet werden, da dieses erst im Herbst 2016 veröffentlicht wird.

Dieses Kapitel ist nach den Grundkompetenzen für die schriftliche Reifeprüfung in Mathematik aufgegliedert, wobei die Grundkompetenzen AG 3.3 und AG 3.4 auf Grund ihrer Komplexität nochmals unterteilt worden sind.

5.1 Vektoren als Zahlentupel – AG 3.1

Die erste den Vektoren zugeordnete Grundkompetenz AG 3.1 bezieht sich auf das Verständnis von Vektoren als algebraische Objekte: „Vektoren als Zahlentupel verständig einsetzen und im Kontext deuten können“ (Liebscher et al. 2013: 9). Die Theorie, die hinter diesem Ansatz steckt,

ist bereits in Kapitel 4.4 behandelt worden. Dieser Abschnitt beleuchtet daher, inwiefern die hier ausgewählten aktuellen Schulbücher diesen Ansatz vertreten.

Das erste heute gängige Schulbuch, das hier besprochen werden soll, ist *Thema Mathematik für die 5. Klasse AHS* von Brand et al. (2009). Vektoren werden grundsätzlich so definiert (Brand et al. 2009: 180):

Definition: Ein Vektor ist ein Zahlenpaar.

Ob diese Definition auf einen geometrischen oder einen algebraischen Ansatz ausgelegt ist, kann nicht eindeutig beantwortet werden. Im Folgenden ist aber nur von Punkten und Pfeilen die Rede und auch die ersten Übungsbeispiele behandeln ausschließlich den geometrischen Aspekt. Der algebraische Ansatz taucht erstmals bei der Einführung der Addition und Subtraktion zweier Vektoren auf (Brand et al. 2009: 184), welche in Kapitel 5.3.1 genauer beleuchtet werden. Sowohl die Motivation dieser Rechenoperationen, als auch die Aufgaben enthalten algebraische und geometrische Beispiele. Ähnlich verhält es sich bei der Einführung des skalaren Produkts (Brand et al. 2009: 188), wobei auffällt, dass hier, sowie auch vorher, die algebraischen Erklärungen und Beispiele immer den geometrischen vorangehen, die geometrischen Aufgaben aber im Endeffekt doch immer überwiegen. Insgesamt erwähnen Brand et al. (2009) aber nie, wie und wieso man gewisse Sachverhalte mit Hilfe der Vektoren darstellen kann und sogar sollte. Dies wird auch im Buch für die sechste Klasse (Brand et al. 2010: 96) nicht betrachtet.

Im Schulbuch *Klar² Mathematik 5* von Binder, Denninger & Urban-Woldron (2010) werden Vektoren als rein geometrische Objekte vorgestellt und behandelt. Im gesamten Abschnitt über die Vektorrechnung (Binder, Denninger & Urban-Woldron 2010: 182-228) werden Vektoren immer nur als Punkte und Pfeile interpretiert. Algebraische Beispiele wie in Brand et al. (2009) sind nicht einmal im Bereich der Rechenoperationen zu finden. Auch im zugehörigen Schulbuch für die sechste Klasse (Langensteiner et al. 2011) wird der algebraische Aspekt der Vektorrechnung entgegen der Lehrplananforderungen (Lehrplan 2004: 4-5) ignoriert.

Malle et al. (2010a: 204-215) räumen im Schulbuch *Mathematik verstehen 5* der algebraischen Einführung des Vektorbegriffs ein eigenes Kapitel ein. Dieses Kapitel beschäftigt sich ausschließlich mit Zahlentupel, beginnend bei Zahlenpaaren, und behandelt die Rechenoperationen, die Addition und Subtraktion zweier Vektoren, sowie die Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar und deren Rechengesetze, und das Skalarprodukt von Vektoren und dessen Rechengesetze auf rein algebraischer Basis. Wie auch bei Bürger et al. (1978) wird

der Vektorbegriff durch die Notwendigkeit von mehreren Zahlen, um gewisse Sachverhalte zu beschreiben, motiviert (Malle et al. 2010a: 204). Als Beispiele werden die Einnahmen und Ausgaben in Bezug auf das monatliche Taschengeld, die Koordinaten eines Punktes in der Ebene, Stückzahlen von Nägeln und Schrauben sowie die Grundgebühr und der Verbrauch für die monatlichen Handykosten genannt (Malle et al. 2010a: 204). Die Übungsaufgaben erfordern die Darstellung ähnlicher Sachverhalte mittels Vektoren, wie zum Beispiel die erreichten Punkte bei zwei Tests bei Aufgabe 11.04 (Malle 2010a: 205):

11.04 Beate und Dora haben zwei Tests absolviert. Bei jedem Test konnte man 20 Punkte erreichen. Beate erhielt auf den ersten Test 15 Punkte und auf den zweiten 18 Punkte. Dora erhielt jedes Mal zwei Punkte weniger als Beate. Schreibe den Vektor aus $\mathbb{R}^2$ an, der

- a) Beates Punktezahlen bei den beiden Tests angibt,
- b) Doras Punktezahlen bei den beiden Tests angibt,
- c) die Punktezahlen der beiden Mädchen beim ersten Test angibt,
- d) die Punktezahlen der beiden Mädchen beim zweiten Test angibt!

Dieses Kapitel behandelt hier entsprechend den Lehrplananforderungen (Lehrplan 2004: 4) nur Zahlenpaare, aber keine Zahlentripel, Quadrupel oder allgemein n-Tupel. Im Gegensatz zu Bürger et al. (1978) werden dafür in Malle et al. (2010a) bereits die Rechenoperationen explizit in algebraischer Form behandelt und sowohl in konkreten einfachen Rechenbeispielen, als auch in anwendungsorientierten Textaufgaben geübt. Auch das Skalarprodukt zweier Vektoren wird anhand anschaulicher Beispiel algebraisch motiviert, eingeführt und geübt.⁴ Erst das darauffolgende Kapitel „Geometrische Darstellung von Vektoren und deren Rechenoperationen“ (Malle et al. 2010a: 216) wendet sich den geometrischen Aspekten der Vektoren zu. Im Schulbuch für die sechste Klasse werden vorerst Zahlentripel und schließlich „Vektoren mit n Koordinaten“ (Malle et al. 2010b: 198-199) betrachtet.

Auch bei Bleier et. al (2014: 271-273) wird sowohl der algebraische, als auch der geometrische Ansatz der Vektorrechnung vorgestellt. Nachdem hier aber zuerst eine geometrische und dann erst eine algebraische Definition besprochen werden, wirkt es nicht so, als ob die geometrische Darstellung von Vektoren tatsächlich nur als Darstellung gesehen würde. Viel eher wollen die Autoren offensichtlich beide Aspekte von Vektoren zu inkludieren und hervorzuheben. Der algebraische Ansatz ist unter der Überschrift „Vektoren in Anwendung“ (Bleier et al. 2014: 272) zu finden. Hier werden beispielsweise Geschwindigkeitsvektoren, Kraftvektoren und Bestandsvektoren behandelt. Zu jeder der drei

⁴ Das Rechenoperationen werden in Kapitel 5.3 in detaillierter Form behandelt

Arten von Vektoren wird eine kurze Erklärung mit einem Musterbeispiel vorgestellt und ein Übungsbeispiel geliefert (Bleier et al. 2014: 272-273). Einige wenige weitere Übungsaufgaben zu Geschwindigkeitsvektoren, Kraftvektoren und Bestandsvektoren sind auch im Aufgabenteil dieses Buchkapitels zu finden (Bleier et al. 2014: 275). Dabei werden vor allem im Hinblick auf Bestandsvektoren auch Aufgaben gestellt, die das Aufstellen von Vektoren mit mehr als zwei Komponenten erfordern, wie beispielsweise folgende Aufgabe (Bleier et al. 2014: 275):

841) Gib einen Vektor an,

- a) dessen 7 Komponenten deine tägliche Computerarbeitszeit der letzten Woche enthält,
- b) der als Komponenten das Alter deiner Familienmitglieder enthält.

Im Gegensatz zu Malle et al. (2010a) fällt aber der algebraische Fokus eher geringer aus.

Das zugehörige Schulbuch *Dimensionen Mathematik 6* (Bleier et al. 2015: 240) behandelt den algebraischen Aspekt der Vektoren im $\mathbb{R}^3$ nur ganz kurz und hebt ansonsten die geometrische Deutung der Vektoren im Raum viel stärker hervor.

Im Schulbuch *Lösungswege Mathematik Oberstufe 5* von Freiler et al. (2015) ist wie bei Malle et al. (2010a) ein starker Fokus auf die algebraische Bedeutung von Vektoren zu finden. Die Einführung der Vektoren als n-Tupel erfolgt durch nachstehende Definition (Freiler et al. 2015: 203):

Vektor

Ein **Vektor** ist ein n-Tupel von reellen Zahlen ($n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$). Die Menge aller n-Tupel wird $\mathbb{R}^n$ genannt: $\mathbb{R}^n = \{(a_1 \mid a_2 \mid a_3 \mid \dots \mid a_n) \mid a_1, a_2, a_3, \dots, a_n \in \mathbb{R}\}$

Das erste Musterbeispiel listet die Preise fünf verschiedener Pizzasorten auf und gibt an, wie viele Pizzasorten eine Familie jeweils bestellt. Nun wird gezeigt, wie einerseits ein Preisvektor aufgestellt werden kann, der die Preise dieser Pizzasorten darstellt, und andererseits ein Vektor angegeben werden kann, der die Anzahl der bestellten Pizzasorten zeigt (Freiler et al. 2015: 203). Ein paar weitere Übungsaufgaben erfordern das Aufstellen von Vektoren für die Darstellung verschiedener Sachverhalte in unterschiedlichen Kontexten, beispielsweise die Anzahl der Mitarbeiter in Filialen einer Sportkette, die Schularbeitsnoten zweier Schülerinnen und die Siege, Tordifferenzen und Ähnliches verschiedener Klubs in der österreichischen Bundesliga (Freiler et al. 2015: 204). Im weiteren Verlauf werden in ähnlich detaillierter Form wie bereits in Malle et al. (2010a) die algebraische Vektorrechnung behandelt, vor allem die Rechenoperationen, die Rechengesetze und das Skalarprodukt. Hierbei wird aber im Gegensatz zu Malle et al. (2010a) bereits in der fünften Klasse der Fokus auf allgemeine n-Tupel gelegt

und nicht nur auf den $\mathbb{R}^2$. Erst dann wird zur „[g]eometrische[n] Interpretation von Vektoren im $\mathbb{R}^2$ “ (Freiler et al. 2015: 212) übergeleitet.

5.2 Geometrische Deutung von Vektoren – AG 3.2

Die Grundkompetenz AG 3.2 sieht schließlich die geometrische Deutung von Vektoren vor: „Vektoren geometrisch (als Punkte bzw. Pfeile) deuten und verständig einsetzen können“ (Liebscher et al. 2013: 9). Die theoretische Grundlage dazu ist ebenso in Kapitel 4.4 behandelt worden. Erneut wird der Fokus darauf gelegt, wie die verschiedenen Schulbücher diese Grundkompetenz zu fördern vermögen.

In Brand et al. (2009: 180) werden von Beginn an Vektoren als Pfeile und Punkte vorgestellt, trotz der einfachen Definition als „Zahlenpaar“. Dabei wird aber nicht nach dem in Kapitel 4.4 propagierten Konzept gearbeitet, die Vektoren prinzipiell algebraisch einzuführen und die geometrische Darstellung lediglich als Deutungsmöglichkeit zu interpretieren. In diesem Schulbuch werden Vektoren von Grund auf als geometrische Objekte betrachtet, und zwar sowohl als Pfeile, als auch als Punkte, obwohl dies nirgendwo explizit erwähnt wird. Gleich am Anfang des Kapitels über die Vektorrechnung wird die „Spitze-minus-Schaft-Regel“ (Brand et al. 2009: 180) eingeführt, um Vektoren zwischen zwei Punkten aufstellen zu können. Dabei wird auch extra darauf hingewiesen, dass diese Regel auch umgekehrt werden kann, wenn „ein Punkt A und die Wegbeschreibung $\overrightarrow{AB}$ bekannt sind“ (Brand et al. 2009: 180) und der Punkt B bestimmt werden soll. Obwohl in der ursprünglichen Regel zwei Punkte voneinander abgezogen werden, während die Umkehrung die Addition von einem Punkt und einem Pfeil erfordert, wird auf diesen Unterschied nicht eingegangen, da ein Vektor ohnehin nur als „Zahlenpaar“ definiert worden ist und sich daher, wie schon Malle (2007: 87) argumentiert hat, die beiden Rechenoperationen nicht voneinander unterscheiden. Interessant ist, dass eigentlich bereits hier die Punkt-Pfeil-Addition eingeführt wird und im eigentlichen Kapitel „Addition und Subtraktion von Vektoren“ (Brand et al. 2009: 184) nur noch die Pfeil-Pfeil-Addition behandelt wird. Die Übungsbeispiele zu der Einführung von Vektoren erfordern das Aufstellen von Vektoren zwischen zwei Punkten sowie die Anwendung der Spitze-minus-Schaft-Regel und deren Umkehrung. Zur Spitze-minus-Schaft-Regel werden bereits Aufgaben gestellt, bei denen SchülerInnen diese im Quadrat und Rechteck anwenden müssen, um fehlende Punkte zu berechnen, wie es auch in folgender Aufgabe erforderlich ist (Brand et al. 2009: 181):

1038) Berechne den fehlenden Punkt des Quadrats und kontrolliere durch eine Zeichnung.

a) $A(-3|1)$, $B(4|-1)$, $C(6|6)$, D

Das zugehörige Schulbuch für die sechste Klasse (Brand et al. 2010: 97) inkludiert ebenfalls nur Übungsaufgaben zum Aufstellen von Vektoren bei zwei gegebenen Punkten beziehungsweise zum Anwenden der Spitze-minus-Schaft-Regel in geometrischen Figuren.

Wie bereits erwähnt, bearbeiten Binder, Denninger & Urban-Woldron (2010) die geometrische Deutung von Vektoren in ihrem Schulbuch *Klar² Mathematik 5* sehr intensiv. Zuerst werden Punkte im kartesischen Koordinatensystem näher betrachtet, deren Lage durch „ein geordnetes Zahlenpaar $(x_p|y_p)$ “ (Binder, Denninger & Urban-Woldron 2010: 182) angegeben werden kann. Anschließend werden diese als Ortspfeile beschrieben, also als gerichtete Strecken, deren Anfangspunkt im Koordinatenursprung liegt. Pfeile allgemein werden als gerichtete Strecken eingeführt, die einen beliebigen Anfangs- und Endpunkt besitzen. Nun wird, wie bei Brand et al. (2009: 180), die Spitze-minus-Schaft-Regel hergeleitet, benannt und anhand von Musterbeispielen vorgeführt (Binder, Denninger & Urban-Woldron 2010: 183). Dabei wird ebenfalls, wie bei Brand et al. (2009: 180), explizit darauf hingewiesen, dass nicht nur der Vektor zwischen zwei Punkten mit Hilfe dieser Regel aufgestellt wird, sondern auch der Anfangspunkt oder Endpunkt eines Pfeils berechnet werden kann, wenn der Pfeil und jeweils Anfangs- oder Endpunkt gegeben sind (Binder, Denninger & Urban-Woldron 2010: 184). Die Übungsaufgaben zu diesem Abschnitt konzentrieren sich ausschließlich auf das geometrische Bestimmen von Vektoren und Punkten, sowie die rechnerische Anwendung der Spitze-minus-Schaft-Regel (Binder, Denninger & Urban-Woldron 2010: 189).

Im Schulbuch von Langensteiner et al. (2011: 14-15) für die sechste Klasse liegt der Fokus ebenfalls auf der Anwendung der Spitze-minus-Schaft-Regel in geometrischen Figuren.

Malle et al. (2010a: 216) wenden sich im Kapitel „Geometrische Darstellung von Vektoren und deren Rechenoperationen“ den geometrischen Aspekten der Vektoren zu. Wie bei Malle (2007: 85) propagiert, werden Vektoren hier nicht als geometrische Objekte definiert, sondern lediglich die möglichen Darstellungen von Vektoren durch die Geometrie aufgezeigt. Auch hier ähnelt der Ansatz des Buches stark dem in Abschnitt 4.1.1 erklärten Konzept von Malle (2007), da wiederum der Fokus auf den Darstellungen von Vektoren sowohl als Punkte, als auch als Pfeile liegt (Malle et al. 2010a: 216). Hinsichtlich der Darstellung von Vektoren als Pfeile wird darauf hingewiesen, dass ein Zahlenpaar durch unendlich viele gleich lange, parallele und gleich gerichtete Pfeile in der Ebene dargestellt werden können (Malle et al.

2010a: 216). Eine Zeichnung (Malle et al. 2010a: 217) ähnlich zu jener in Abbildung 8 soll das Verständnis dieser Aussage unterstützen:

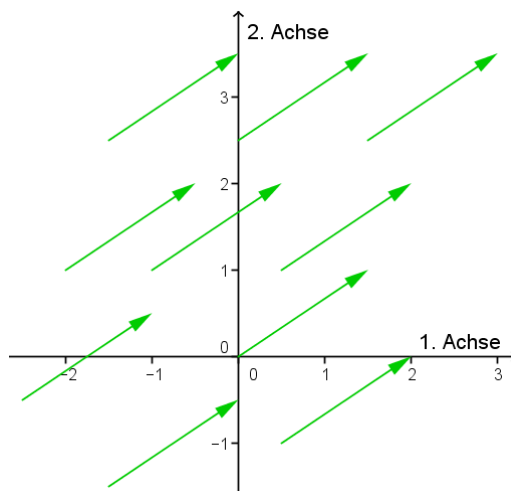


Abbildung 8: Ein Zahlenpaar durch verschiedene Pfeile in der Ebene dargestellt (Malle et al. 2010a: 217)

Malle et al. (2010a: 217) legen besonderen Wert auf die Beschriftung der Vektoren, je nachdem, ob sie geometrisch durch einen Punkt oder einen Pfeil dargestellt werden, wie auch in Malle (2007: 85) zu lesen ist. Punkte werden dementsprechend mit Großbuchstaben bezeichnet, während Pfeile mit Kleinbuchstaben und einem kleinen Pfeil oberhalb beschriftet werden. In diesem Schulbuch werden zuerst noch einige Übungsaufgaben zur Darstellung der Vektoren als Pfeile, mit besonderem Augenmerk auf den in obiger Abbildung dargestellten Sachverhalt, angeboten, bevor die Spitze-minus-Schaft-Regel eingeführt wird (Malle et al. 2010a: 219). Einige Übungsbeispiele erfordern das Berechnen eines Vektors mit gegebenem Anfangs- und Endpunkt. Im Anschluss wird auch die Umkehrung sowohl ausführlich erklärt, als auch anhand einiger Aufgaben geübt. Das übrige Kapitel beschäftigt sich schließlich mit der geometrischen Darstellung der Rechenoperationen und deren Anwendungen.

Mathematik verstehen 6 von Malle et al. (2010b: 158-160) behandelt die geometrische Deutung von Vektoren erneut. Einige Übungsaufgaben tragen zur Vertiefung dieses Aspekts der Vektorrechnung bei, im besonderen Hinblick auch auf die Förderung des räumlichen Vorstellungsvermögens, wie es in folgender Aufgabe notwendig ist (Malle et al. 2010b: 160):

10.09 Berechne die fehlenden Eckpunkte des Parallelepipeds mit der Grundfläche $ABCD$ und der Deckfläche $EFGH$!

a) $A = (-1|2| - 5)$, $B = (1|7| - 4)$, $E = (3|0|3)$, $G = (1|6|7)$

Im Schulbuch *Dimensionen Mathematik 5* von Bleier et al. (2014: 268) wird im Gegensatz zu Malle et al. (2010a) zu Beginn der Fokus auf die geometrische Bedeutung von Vektoren gelegt, insbesondere auf die Interpretation als Punkte und als Pfeile. Dabei wird die

Pfeilinterpretation nicht einfach über die Spitze-minus-Schaft-Formel eingeführt, beziehungsweise nicht so genannt, sondern wie bei Malle et al. (2010a: 206) als Differenz der x-Koordinaten und y-Koordinaten erklärt. Da auch hier das Pfeilklassenmodell bis zu einem gewissen Grad verwendet wird, gibt es auch Übungsaufgaben, wie zum Beispiel Aufgabe 821a), welche in Abbildung 9 dargestellt (Bleier et al. 2014: 270). Man soll zu dieser Abbildung angeben, „welche der Pfeile der Buchstaben H und N dieselbe Koordinatendarstellung haben“ (Bleier et al. 2014: 270):

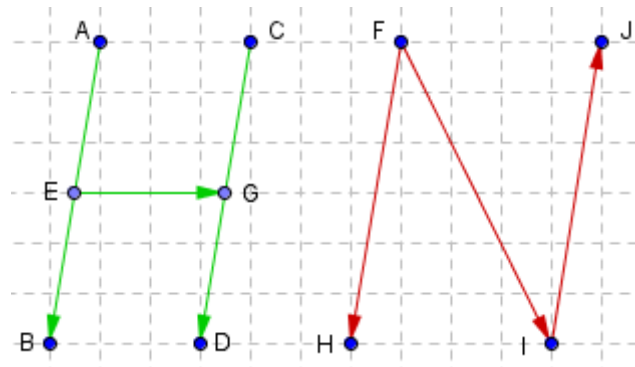


Abbildung 9: Aufgabe 821a) in Dimensionen Mathematik 5 (Bleier et al. 2014: 270)

Auch andere Aufgaben verweisen auf das Pfeilklassenmodell, da beispielsweise drei Pfeile gezeichnet werden sollen, die einen angegebenen Vektor $\vec{v}$ repräsentieren sollen (Bleier et al. 2014: 274). Außerdem erfordern weitere Übungsaufgaben das graphische Darstellen sowie das rechnerische Aufstellen von Vektoren (Bleier et al. 2014: 274-275). Die Länge eines Vektors spielt bei vielen der Beispiele ebenfalls eine wichtige Rolle. Anschließend folgen bereits die Rechenoperationen, die erneut mit vorerst geometrischem Fokus eingeführt werden.

Das zugehörige Schulbuch für die sechste Klasse (Bleier et al. 2015: 234-241) behandelt die geometrische Deutung von Vektoren im Raum nur in stark verkürzter Form und legt den Fokus sehr früh schon auf die Berechnung der Länge, das Aufstellen von Einheitsvektoren und die Rechenoperationen.

In Freiler et al. (2015: 212-217) wird der geometrischen Interpretation von Vektoren wie bei Malle et al. (2010a) ein eigenes Kapitel eingeräumt. Die Erklärungen, Skizzen und Beispiele, um die Darstellungsmöglichkeiten der Vektoren zu verdeutlichen, ähneln denen in Malle et al. (2010a) stark. Im Vergleich zu Bleier et al. (2014) wird aber durchgängig darauf geachtet, die Vektoren nicht auch geometrisch zu definieren, sondern sie tatsächlich nur geometrisch zu interpretieren, darzustellen und zu deuten. Erneut wird eine dezidierte Unterscheidung zwischen der Darstellungen als Punkte und als Pfeile hervorgehoben (Freiler et al. 2015: 212). Auch die Schreibweise mittels Großbuchstaben für Punkte und Kleinbuchstaben mit einem kleinen Pfeil oberhalb für Pfeile wird wie bei Malle et al. (2010a)

gehandhabt. Wie bei Bleier et al. (2014) legen einige Aufgaben besonderen Wert darauf, dass ein Zahlenpaar durch unendlich viele Pfeile in der Ebene dargestellt werden kann (Freiler et al. 2015: 213). Anschließend führen Freiler et al. (2015: 214), wie die meisten anderen Schulbücher, die Spitze-minus-Schaft-Regel ein. Im Anschluss daran behandeln Freiler et al. (2015: 216-217) noch den Betrag eines Vektors.

5.3 Rechenoperationen mit Vektoren – AG 3.3

Betreffend der Rechenoperationen schreibt AG 3.3 der Grundkompetenzen für Vektoren folgendes vor: „Definition der Rechenoperationen mit Vektoren (Addition, Multiplikation mit einem Skalar, Skalarmultiplikation) kennen, Rechenoperationen verständig einsetzen und (auch geometrisch) deuten können“ (Liebscher et al. 2013: 9). In diesem Abschnitt werden daher die drei hier genannten Rechenoperationen näher betrachtet. Der Fokus liegt dabei darauf, wie diese Rechenoperationen in bestimmten Schulbüchern definiert werden und inwiefern die Aufgaben das verständige Einsetzen und die geometrische Deutung erfordern und fördern. Dabei werden nur die Schulbücher aus der fünften Klasse und damit zum Großteil nur die Rechenoperationen im $\mathbb{R}^2$ betrachtet.

5.3.1 Addition von Vektoren

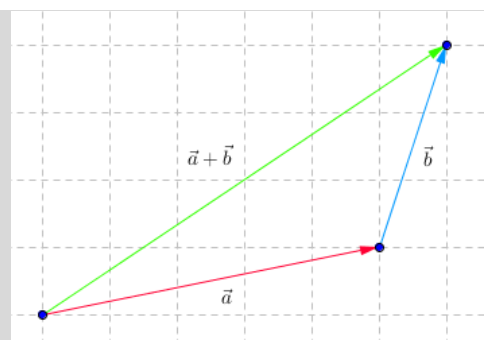
Im Schulbuch *Thema Mathematik für die 5. Klasse AHS* von Brand et al. (2009: 184) basiert die Definition der Addition auf folgender Grundvorstellung: „Ein Vektor enthält zusammengehörige Daten.“ Anhand zweier Beispiele wird die Addition anschaulich zuerst algebraisch berechnet und anschließend geometrisch gedeutet. Für die geometrische Deutung findet man folgenden Hinweis: „Addieren von Vektoren heißt ‚Weitergehen‘: Man erhält den Vektor vom Ausgangspunkt zum Endpunkt“ (Brand et al. 2009: 184). Nun erfolgt die Definition der Addition von Vektoren (Brand et al. 2009: 184):

Definition: Vektoraddition

Du addierst Vektoren komponentenweise:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1+b_1 \\ a_2+b_2 \end{pmatrix}$$

Hinweis: Geometrisch addierst du Vektoren, indem du die Pfeile „aneinander hängst“.



Diese Definition spezifiziert nicht, ob die Vektoraddition mit Vektoren, die mehr als zwei Komponenten haben, ebenfalls komponentenweise definiert ist. Dies wird jedoch in den

Aufgaben 1068 und 1069 (Brand et al. 2009: 185) nachgeholt. Auf selbiger Seite findet man weitere Übungsaufgaben zur Addition zweier oder mehrerer Vektoren aus dem $\mathbb{R}^2$. Dabei liefern nur vier Beispiele einen algebraischen Kontext, während die anderen lediglich rechnerisch und graphisch gelöst werden sollen.

Die Subtraktion wird in Brand et al. (2009: 184) über den Gegenvektor definiert:

Definition: $-\vec{a} = \begin{pmatrix} -a_1 \\ -a_2 \end{pmatrix}$ heißt *Gegenvektor* zu $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$.

Die *Differenz* $\vec{a} - \vec{b}$ ist die *Addition mit dem Gegenvektor* $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$.

Der Vektor $\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ heißt *Nullvektor*.

Die geometrische Vorstellung des Gegenvektors könnte auf Grund einer fehlenden Skizze anfangs etwas schwierig werden. Da in diesem Schulbuch Vektoren nur als Zahlenpaare definiert werden (Brand et al. 2009: 182), haben SchülerInnen die Begriffe Orientierung, Richtung und Länge und deren Bedeutungen in der Vektorrechnung noch nicht kennengelernt. Es ist folglich für SchülerInnen vielleicht nicht zugleich ersichtlich, dass die Richtung und die Länge eines Vektors und dessen Gegenvektor gleich sind und sich ausschließlich die Orientierung ändert.

Im Schulbuch für die sechste Klasse (Brand et al. 2010: 98-101) wird die Addition zweier Vektoren mit drei Komponenten nur kurz erklärt und in einigen wenigen konkreten Rechenbeispielen ohne Kontext geübt. Es wird gezeigt, dass auch die anderen Rechenoperationen mit Vektoren mit drei Komponenten analog zu jenen mit Vektoren mit zwei Komponenten funktionieren.

Das Schulbuch *Klar² Mathematik 5* von Binder, Denninger & Urban-Woldron (2010: 191) motiviert die Addition zweier Vektoren einerseits über die davor eingeführte Spitze-minus-Schaft-Regel und andererseits graphisch über Ortsvektoren. Eine Herleitung der Addition wird im Buch folgendermaßen dargestellt (Binder, Denninger & Urban-Woldron 2010: 191):

$$\overrightarrow{AE} = E - A \Rightarrow \begin{pmatrix} x_{AE} \\ y_{AE} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_E - x_A \\ y_E - y_A \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} x_{AE} = x_E - x_A \\ y_{AE} = y_E - y_A \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} x_{AE} + x_A = x_E \\ y_{AE} + y_A = y_E \end{matrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_{AE} + x_A \\ y_{AE} + y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_E \\ y_E \end{pmatrix}$$

Die Addition beziehungsweise Subtraktion wird hier also auf das Lösen einzelner Gleichungen von den jeweiligen Koordinaten zurückgeführt. Die graphische Herleitung über die Ortsvektoren wird ebenfalls in Anlehnung an die Spitze-minus-Schaft-Regel gezeigt. Zuvor wird für die Berechnung des Endpunktes eines Pfeiles definiert: $E = A + \overrightarrow{AE}$, wobei $A = \text{Anfangspunkt}$ und $E = \text{Endpunkt}$ (Binder, Denninger & Urban-Woldron 2010: 184).

Interpretiert man die Punkte A und E als Ortspfeile, so erhält man $\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AE}$, welche nun einer Addition von Pfeilen entspricht. Dabei wird aber vorausgesetzt, dass ein Punkt und ein Pfeil addiert werden dürfen und man bereits weiß, wie diese addiert werden, nämlich komponentenweise. Wie bereits in Kapitel 4.3.2 erwähnt, wird die Vektoraddition schlussendlich als eine Translation erklärt: „Unter der **Summe zweier Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$** versteht man jenen Vektor $\vec{c}$, der zur selben Verschiebung der Zeichenebene führt wie das Hintereinanderausführen der Verschiebungen durch die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ “ (Binder, Denninger & Urban-Woldron 2010: 191). Die Verschiebung der Zeichenebene ist jedoch für SchülerInnen schwer nachvollziehbar, da sich diese laut Hartmann (1993: 120-121) eher eine Verschiebung einzelner Objekte, wie eines Punktes oder eine geometrischen Figur, vorstellen, anstatt der Verschiebung der gesamten Zeichenebene. Erst auf der nächsten Seite wird schließlich der Merksatz eingeführt (Binder, Denninger & Urban-Woldron 2010: 192):

Die Koordinaten des Summenvektors der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ erhält man als Summe der Koordinaten der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$: $\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x + b_x \\ a_y + b_y \end{pmatrix}$

Anschließend wird anhand eines Beispiels die Addition zweier Vektoren sowohl graphisch als auch rechnerisch durchgeführt. Weitere Übungsbeispiele (Binder, Denninger & Urban-Woldron 2010: 196-197) erfordern ausschließlich das Berechnen und das graphische Lösen ohne Kontexte, im Gegensatz zu Brand et al. (2009). Die Vektorsubtraktion wird hier wie bei Brand et al. (2009: 184) über die Addition eines Gegenvektors definiert. Dabei wird extra darauf hingewiesen, dass man „[d]ie Koordinaten des Differenzvektors der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ [...] als Differenz der Koordinaten der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ “ (Binder, Denninger & Urban-Woldron 2010: 192) erhält.

Ebenso wie Brand et al. (2010: 98-101) behandelt auch das Schulbuch für die sechste Klasse (Langensteiner et al. 2011: 5-7) die verschiedenen Rechenoperationen in verkürzter Form noch einmal.

Malle et al. (2010a: 206) leiten in ihrem Schulbuch *Mathematik Verstehen 5* die Vektoraddition und die Vektorsubtraktion über ein algebraisches Beispiel her und stellen erst später die geometrische Darstellung der Vektoraddition vor, wie es auch in der Grundkompetenz AG 3.3 (Liebscher et al. 2013: 9) verlangt wird. In diesem Beispiel stellen die beiden Vektoren die jeweiligen Ausgaben für den Urlaub von Anna und Bea da, wobei die erste Komponente die Flugkosten und die zweite Komponente die Hotelkosten angibt. Es soll nun berechnet werden, wie viel die beiden jeweils für Flug und Hotel insgesamt ausgegeben haben, und um wie viel

Bea für Flug beziehungsweise Hotel mehr gezahlt hat. Hier müssen die Lösungen komponentenweise berechnet werden, da die gesamten Flug- und Hotelkosten jeweils einzeln berechnet und verglichen werden sollen. Daraus folgern Malle et al. (2010a: 206) nachstehende Definition für die Summe und Differenz von Vektoren aus dem $\mathbb{R}^2$:

Definition: Summe, Differenz [...] von Vektoren aus $\mathbb{R}^2$:

Es seien $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ Vektoren aus $\mathbb{R}^2$ [...]. Man setzt:

$$A + B = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1+b_1 \\ a_2+b_2 \end{pmatrix}, A - B = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1-b_1 \\ a_2-b_2 \end{pmatrix}$$

In einem anschließenden Merksatz wird auch in Worten erklärt, dass Vektoren addiert beziehungsweise subtrahiert werden, „indem man die einander entsprechenden Koordinaten addiert (subtrahiert)“ (Malle et al. 2010a: 206). Im Anschluss liefert das Schulbuch einige Beispiele, wobei nur wenige reine Rechenbeispiele sind und die meisten in einen nachvollziehbaren Kontext, ähnlich dem Einführungsbeispiel, gesetzt werden, um die Anwendungsbereiche der Vektorrechnung schon hier aufzuzeigen (Malle et al. 2010a: 207-209).⁵ Zusätzlich behandelt das *Schulbuch Mathematik Verstehen 5* hier die Rechengesetze der Addition, die weder in Brand et al. (2009), noch in (Binder, Denninger & Urban-Woldron 2010) explizit diskutiert werden. Wie bei Malle (2007: 86) wird bei der geometrischen Deutung der Vektoraddition zwischen der Punkt-Pfeil-Darstellung und der Pfeildarstellung der Vektoraddition unterschieden (Malle et al. 2010a: 220).⁶

Das zugehörige Schulbuch für die sechste Klasse (Malle et al. 2010b: 156-157) wie bei (Brand et al. 2010: 98) kurz angeschnitten, wobei darauf hingewiesen wird, dass diese Rechenoperation für Vektoren mit drei Komponenten, sowie auch die Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar und das Skalarprodukt zweier Vektoren, analog zu jenen für Zahlenpaare ist.

Im Schulbuch *Dimensionen Mathematik 5* von Bleier et al. (2014: 276) wird die Vektoraddition ohne erklärende Beispiele oder Skizzen einfach mittels folgender Definition eingeführt, wobei im Gegensatz zu den anderen Schulbüchern zum ersten Mal explizit darauf hingewiesen wird, dass diese Rechenoperation, sowie auch die Subtraktion und die Multiplikation mit einem Skalar für beliebige Vektoren mit n Komponenten, für $n \in \mathbb{N}$, gelten:

⁵ Bei Malle et al. (2010a: 206) wird mit der Vektoraddition und –subtraktion gleichzeitig die Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar behandelt, welches in dieser Arbeit im darauffolgenden Abschnitt erst näher beleuchtet wird. Die Aufgaben erfordern daher bereits die Kenntnis all dieser Rechenoperationen.

⁶ Siehe auch Kapitel 4.4.1

Definition: Addition von Vektoren

Vektoren werden addiert, indem komponentenweise die Summe gebildet wird.

Für Vektoren mit zwei Komponenten gilt:

$$\begin{pmatrix} x_a \\ y_a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_a + x_b \\ y_a + y_b \end{pmatrix} \text{ bzw. } (x_a|y_a) + (x_b|y_b) = (x_a + x_b|y_a + y_b)$$

Diese Definition unterscheidet sich nicht wesentlich von den bisher diskutierten Definitionen der Vektoraddition. Auffällig ist nur, dass auch explizit die Zeilenschreibweise und nicht nur die Spaltenschreibweise angeführt wird. Die geometrische Deutung der Addition wird nicht wie bei Malle et al. (2010a) in einem eigenen Kapitel behandelt, sondern direkt unter der Definition dargestellt. Auch Bleier et al. (2014: 276) unterscheiden wie schon Malle et al. (2010a: 220) zwischen der Addition zweier Pfeile und der Addition eines Punkt und eines Pfeil. Die Definition der Subtraktion von Vektoren entspricht der obigen Definition der Vektoraddition mit Minus- anstatt Pluszeichen. Anschließend wird wieder die geometrische Deutung dieser Rechenoperation diskutiert. Erst hier wird der Gegenvektor $-\vec{b} = \begin{pmatrix} -x_b \\ -y_b \end{pmatrix}$ zum Vektor $\vec{b} = \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \end{pmatrix}$ definiert, um die Vektorsubtraktion zu veranschaulichen, die „Subtraktion von Vektoren wird somit auf das Addieren des Gegenvektors zurückgeführt“ (Bleier et al. 2014: 277).

Die meisten Übungsaufgaben in *Dimensionen Mathematik 5* (Bleier et al. 2014: 280-286) erfordern entweder das graphische und rechnerische Durchführen von Vektoradditionen ohne Kontext, oder stellen den Zusammenhang zwischen der Addition beziehungsweise Subtraktion und physikalischen Kräften, die durch Vektoren dargestellt werden können, her. Nachfolgende Aufgabe zeigt ein Anwendungsbeispiel in Bleier et al. (2014: 284):

876) Auf einen Körper wirken drei Kräfte $\vec{F}_1 = (3N|4N)$, $\vec{F}_2 = (-5N|3N)$ so, dass die resultierende Gesamtkraft durch den Nullvektor gegeben ist (**Kräftegleichgewicht**). Berechne $\vec{F}_3$. Zeichne die drei Kraftvektoren (mit gemeinsamem Anfangspunkt).

Die Anwendung der Vektorrechnung in der Physik, insbesondere für die Darstellung von Kräften, ist von großer Bedeutung für die standardisierte Reifeprüfung. Im Aufgabenpool des Bundesinstituts für Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens (BIFIE 2014: 45) findet sich beispielsweise die in Abbildung 10 dargestellte Aufgabe:

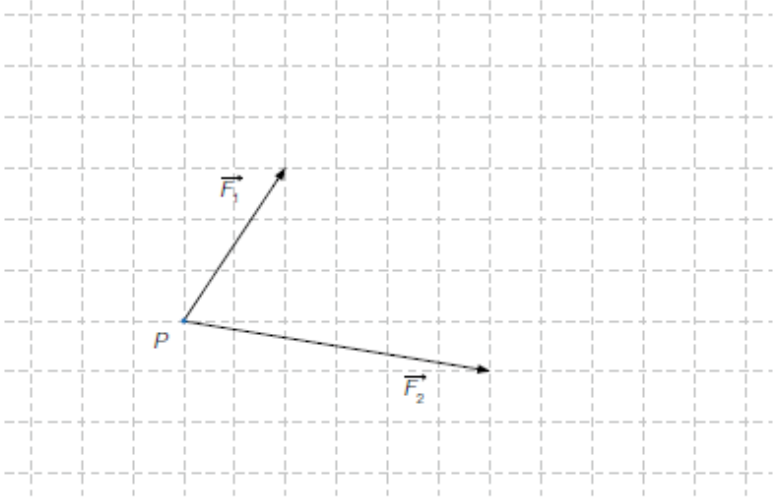
Kräfte		
Aufgabennummer: 1_056		Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Konstruktionsformat		Grundkompetenz: AG 3.2
☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☐ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich
<p>Zwei an einem Punkt P eines Körpers angreifende Kräfte $\vec{F}_1$ und $\vec{F}_2$ lassen sich durch eine einzige am selben Punkt angreifende resultierende Kraft $\vec{F}$ ersetzen, die allein dieselbe Wirkung ausübt wie $\vec{F}_1$ und $\vec{F}_2$ zusammen.</p> <p>Aufgabenstellung:</p> <p>Gegeben sind zwei an einem Punkt P angreifende Kräfte $\vec{F}_1$ und $\vec{F}_2$.</p> <p>Ermitteln Sie grafisch die resultierende Kraft $\vec{F}$ als Summe der Kräfte $\vec{F}_1$ und $\vec{F}_2$!</p> 		

Abbildung 10: BIFIE Aufgabe zu Kräften (BIFIE 2014: 45)

Dieses Beispiel erfordert einerseits das Verständnis, dass Kräfte durch Vektorpfeile graphisch dargestellt werden können und andererseits die Fähigkeit, eigenständig die Addition zweier Pfeile graphisch darzustellen. Diese Aufgabe kann nur dann rechnerisch kontrolliert werden, wenn man die Pfeile $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ und $\vec{F}$ richtig ablesen kann.

Das zugehörige Buch für die sechste Klasse (Bleier et al. 2015: 236) fasst unter folgender Anmerkung alle Rechenoperationen erneut zusammen: „Alle Definitionen und Rechenregeln, die du für zweidimensionale Vektoren kennen gelernt hast, sind in analoger Weise auch für dreidimensionale Vektoren gültig.“ Diskrete Übungsaufgaben für die hier behandelten Rechenoperationen gibt es anschließend nur noch wenige (Bleier et al. 2015: 240).

Ähnlich wie Malle et al. (2010a: 206) motivieren Freiler et al. (2015: 205) im Schulbuch *Lösungswege Mathematik Oberstufe 5* die Einführung der Vektoraddition und der

Vektorsubtraktion durch ein algebraisches Beispiel, welches nachvollziehbar zur Definition der Rechenoperationen führt: ⁷

Eine Trafik verkauft fünf verschiedene Arten von Rubbellosen. Die Vektoren W_1, W_2, W_3, W_4 geben die Verkaufszahlen der einzelnen Lose in vier Wochen wieder.

$$W_1 = \begin{pmatrix} 40 \\ 20 \\ 5 \\ 12 \\ 8 \end{pmatrix} \quad W_2 = \begin{pmatrix} 47 \\ 25 \\ 33 \\ 54 \\ 7 \end{pmatrix} \quad W_3 = \begin{pmatrix} 40 \\ 44 \\ 16 \\ 33 \\ 19 \end{pmatrix} \quad W_4 = \begin{pmatrix} 33 \\ 43 \\ 26 \\ 34 \\ 8 \end{pmatrix}$$

- Berechne den Vektor S , der die Gesamtanzahl der verkauften Lose pro Losart angibt.
- Berechne den Vektor U , der die Differenz der verkauften Lose zwischen der zweiten und dritten Woche angibt. Was bedeutet ein negatives Ergebnis?

Auffällig bei diesem Beispiel ist, dass im Gegensatz zu dem einführenden Beispiel bei Malle et al. (2010a: 206), keine Vektoren mit nur zwei Komponenten gewählt worden sind. Dieses Beispiel zielt also auf die rein algebraische Bedeutung von Vektoren ab und nicht auf deren mögliche geometrische Darstellungen. Des Weiteren spiegelt diese Aufgabe eine realistische Möglichkeit wieder, Vektoren für die vereinfachte Darstellung von Sachverhalten zu verwenden. Anschließend an die Lösung dieses Beispiels werden die Rechenregeln folgendermaßen definiert (Freiler et al. 2015: 206):

Rechenregeln für Vektoren

Seien $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ Vektoren aus $\mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$) [...]

dann gilt: $A + B = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix} \quad A - B = \begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ \vdots \\ a_n - b_n \end{pmatrix} \quad [...]$

Bei der **Addition** bzw. **Subtraktion** zweier Vektoren [...] erhält man als Ergebnis wieder einen Vektor.

Wie bei Bleier et al. (2014: 276) wird explizit auf die Gültigkeit der Rechenregeln im $\mathbb{R}^n$ hingewiesen, wobei dies hier sogar in der Definition selbst ersichtlich ist. Der Zusatz am Ende der Definition ist insofern bedeutend, da in diesem Schulbuch auch die Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar in derselben Definition zu finden ist und später ein Gegensatz zu dem

⁷ Dieses Beispiel wurde gekürzt, da die Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar hier noch nicht diskutiert werden sollen.

Skalarprodukt hergestellt werden kann. Es folgen einige Übungsbeispiele, sowohl mit als auch ohne Kontext. Interessant ist, dass im Hinblick auf den Einsatz neuer Technologien für die zentrale Reifeprüfung auch eine Technologieanleitung zu finden ist, die für GeoGebra und den Taschenrechner TI-Nspire zeigen, wie die Vektoraddition durchgeführt werden kann (Freiler et al. 2015: 206). Gegenvektoren werden hier wie bei Bleier et al. (2014: 277) mit der Subtraktion eines Vektors als Addition eines Gegenvektors in den Zusammenhang gestellt, allerdings erst im Kapitel „Geometrische Interpretation der Rechenoperationen“ (Freiler et al. 2014: 218). Auch hier wird, wie zuvor schon bei Malle et al. (2010a: 220) und bei Bleier et al. (2014: 276) zwischen der Interpretation der Vektoraddition als Punkt-Pfeil-Addition und als Pfeil-Pfeil-Addition unterschieden (Freiler et al. 2015: 218).

Das Verständnis der Pfeil-Pfeil-Addition und des Gegenvektors ist insbesondere im folgenden Beispiel aus dem Aufgabenpool des BIFIE (2014: 49) erforderlich:

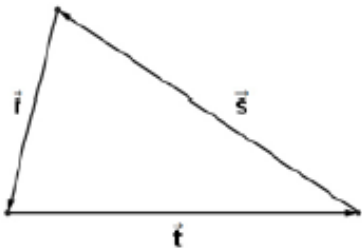
Rechnen mit Vektoren												
Aufgabennummer: 1_073	Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐											
Aufgabenformat: Multiple Choice (2 aus 5)	Grundkompetenz: AG 3.3											
☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☐ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich										
<p>Gegeben sind die Vektoren $\vec{r}$, $\vec{s}$ und $\vec{t}$.</p> <div style="text-align: center; margin: 20px 0;">  </div> <p>Aufgabenstellung:</p> <p>Kreuzen Sie die beiden für diese Vektoren zutreffenden Aussagen an!</p> <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto; border-collapse: collapse;"> <tbody> <tr> <td style="padding: 5px;">$\vec{t} + \vec{s} + \vec{r} = \vec{0}$</td> <td style="width: 40px; text-align: center; padding: 5px;">☐</td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;">$\vec{t} + \vec{s} = -\vec{r}$</td> <td style="text-align: center; padding: 5px;">☐</td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;">$\vec{t} - \vec{s} = \vec{r}$</td> <td style="text-align: center; padding: 5px;">☐</td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;">$\vec{t} - \vec{r} = \vec{s}$</td> <td style="text-align: center; padding: 5px;">☐</td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;">$\vec{t} = \vec{s} + \vec{r}$</td> <td style="text-align: center; padding: 5px;">☐</td> </tr> </tbody> </table>			$\vec{t} + \vec{s} + \vec{r} = \vec{0}$	☐	$\vec{t} + \vec{s} = -\vec{r}$	☐	$\vec{t} - \vec{s} = \vec{r}$	☐	$\vec{t} - \vec{r} = \vec{s}$	☐	$\vec{t} = \vec{s} + \vec{r}$	☐
$\vec{t} + \vec{s} + \vec{r} = \vec{0}$	☐											
$\vec{t} + \vec{s} = -\vec{r}$	☐											
$\vec{t} - \vec{s} = \vec{r}$	☐											
$\vec{t} - \vec{r} = \vec{s}$	☐											
$\vec{t} = \vec{s} + \vec{r}$	☐											

Abbildung 11: BIFIE Aufgabe zum Rechnen mit Vektoren (BIFIE 2014: 49)

Für diese Aufgabe ist neben der Darstellung der Vektoraddition als Pfeil-Pfeil-Addition und dem Gegenvektor außerdem die Kenntnis des Nullvektors erforderlich. Insbesondere um die zweite Lösungsmöglichkeit als richtig zu erkennen, muss das Prinzip des Gegenvektors und damit die Orientierung beziehungsweise Ausrichtung eines Vektorpfeils verstanden worden sein.

Eine besondere Variation der Additionsbeispiele, die als solche in keinem der obigen Schulbüchern enthalten ist, jedoch einfach über die Subtraktion, oder über andere Möglichkeiten, gelöst werden kann, ist zum Haupttermin der standardisierten Reifeprüfung des Schuljahres 2015/16 gefragt worden (BIFIE 2016b: 9):

Aufgabe 5

Vektoraddition

Die unten stehende Abbildung zeigt zwei Vektoren $\vec{v}_1$ und $\vec{v}$.

Aufgabenstellung:

Ergänzen Sie in der Abbildung einen Vektor $\vec{v}_2$ so, dass $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = \vec{v}$ ist!

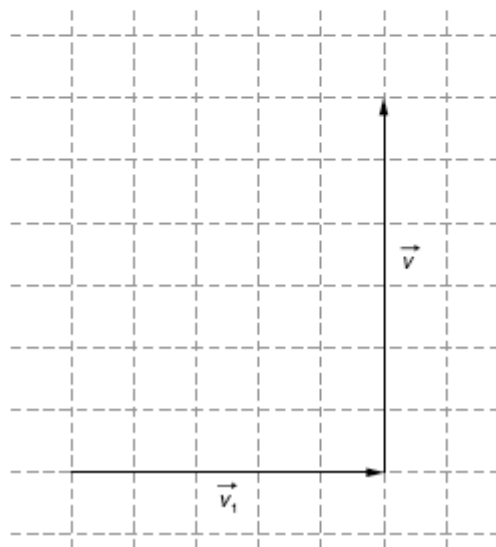


Abbildung 12: Aufgabe der standardisierten Reifeprüfung vom 10. Mai 2016 (BIFIE 2016b: 9)

Aber auch diese Aufgabe kann mittels der Subtraktion oder einfachen Überlegungen gelöst werden. Dabei ist allerdings wichtig, dass SchülerInnen wissen, dass ein Vektor eine Pfeilkategorie ist, beziehungsweise müssen sie wissen, dass ein Vektor durch unendlich viele, gleich lange, gleich gerichtete und gleich orientierte Pfeile dargestellt werden kann, wie in Abbildung 8 aus Kapitel 5.2 ersichtlich ist.

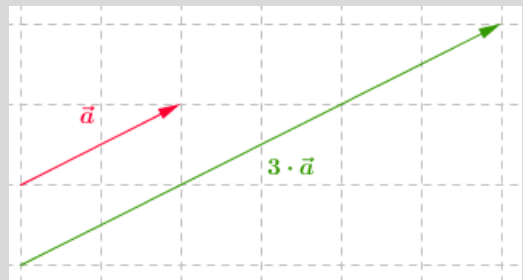
5.3.2 Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar

Das Schulbuch *Thema Mathematik für die 5. Klasse* behandelt die Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar unter dem Titel „Zahl mal Vektor – parallele Vektoren“ (Brand et al. 2009: 186-187). Motiviert wird diese Rechenoperation durch ein anwendungsorientiertes Beispiel, in dem eine Billardkugel mehrmals „infolge einer gleichförmigen Bewegung pro Sekunde um das Wegstück $\vec{s} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ verschoben [wird]“ (Brand et al. 2009: 186). Anschließend folgt die Definition:

Definition: *Multiplikation eines Vektors mit einer Zahl*

Multipliziere den Vektor $\vec{a}$ mit der reellen Zahl r , indem du jede Komponente des Vektors [sic] mit der Zahl r multiplizierst.

$$r \cdot \vec{a} = r \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cdot a_1 \\ r \cdot a_2 \end{pmatrix}$$



Wichtig dabei ist, dass $\vec{a}$ und $r \cdot \vec{a}$ beziehungsweise in der obigen Skizze $3 \cdot \vec{a}$ parallel sind, denn somit kann das Parallelitätskriterium eingeführt werden:

Definition: Vektoren, die sich nur durch die Multiplikation mit einer reellen Zahl unterscheiden, sind parallel.

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} = r \cdot \vec{b} \quad (r \in \mathbb{R})$$

Die Notwendigkeit und Bedeutung dieser Rechenoperation wird hier also damit begründet, dass parallele Vektoren auf Grund obiger Definition bestimmt und erkannt werden können. Direkt unter der Definition befindet sich ein Hinweis, der besagt, dass Vektoren, bei denen nur die Richtung relevant ist, am einfachsten mit „möglichst kleinen Koordinaten“ (Brand et al. 2009: 186) angegeben werden sollten. Dies dient bereits zur Vorbereitung auf die Parameterdarstellung einer Geraden in der Ebene und im Raum, da man dabei die Rechnungen ebenso durch geschickte Wahl des Richtungsvektors vereinfachen kann. Die nachfolgenden Übungsaufgaben legen den Fokus ebenfalls eher auf diese Eigenschaft als auf die eigentliche Rechenoperation. Dabei erfordern die meisten Beispiele das Überprüfen der Parallelität zweier gegebener Vektoren. Die Rechengesetze, die für die Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar gelten, werden nur durch in Übungsaufgaben (Brand et al. 2009: 187) angeschnitten.

Binder, Denninger & Urban-Woldron (2010: 193) führen in ihrem Schulbuch *Klar² Mathematik 5* eine ähnliche Definition dieser Rechenoperation an, allerdings ohne Skizze. Anschließend wird auf für etwas komplizierte Art und Weise begründet, wieso parallele Vektoren Vielfache voneinander sein müssen. Schlussendlich wird, wie schon bei Brand et al. (2009: 186) das Parallelitätskriterium eingeführt. In einer Musteraufgabe wird dann mittels

Koordinatenvergleich gezeigt, wie man eine unbekannte Koordinate eines Vektors bestimmt, wenn die andere bekannt ist und man außerdem weiß, dass der gesuchte Vektor parallel zu einem vorgegebenen Vektor ist. Derartige Aufgaben sind in Brand et al. (2009) nicht zu finden. Des Weiteren wird in *Klar² Mathematik 5* die geometrische Bedeutung der „Größe der reellen Zahl bei der Multiplikation mit einem Vektor“ (Binder, Denninger & Urban-Woldron 2010: 194) detaillierter betrachtet:

Eine Multiplikation eines Vektors mit einer Zahl $r > 1$ führt zu einer Streckung des Vektors.
 Eine Multiplikation eines Vektors mit einer Zahl $0 < r < 1$ führt zu einer Stauchung des Vektors.
 Eine Multiplikation eines Vektors mit einer negativen Zahl ($r < 0$) führt zu einer Änderung der Orientierung des Vektors.

Wie schon bei Brand et al. (2009: 187) liegt bei den Übungsaufgaben der Fokus nicht explizit auf der Rechenoperation, aber auf dem Parallelitätskriterium (Binder, Denninger & Urban-Woldron 2010: 197). Diese werden dabei aber, falls überhaupt, nur mittels geometrischen Figuren, wie zum Beispiel Parallelogrammen oder Trapezen, kontextualisiert, wie beispielsweise in folgender Aufgabe (Binder, Denninger & Urban-Woldron 2010: 197):

5.23) Bestimme jeweils die fehlende Koordinate so, dass das gegebene Viereck ein Trapez darstellt. Beachte, dass es hier zwei Lösungen gibt.

a) $A(-3|2)$, $B(1|-3)$, $C(7|1)$, $D(9|y_D)$

In Malle et al. (2010a: 206) wird die Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar im Zuge eines ähnlichen Beispiels motiviert, wie bereits bei der Addition zweier Vektoren. In diesem Beispiel stellt ein Vektor aus dem $\mathbb{R}^2$, die Flug- und Hotelkosten einer Person für einen Urlaub dar. Nachdem ein Jahr vergangen ist, stellt diese Person fest, dass sowohl die Kosten für den Flug, als auch jene für das Hotel um zehn Prozent teurer geworden sind. Daher muss der Ausgabenvektor mit 1,1 multipliziert werden, nämlich komponentenweise. Dies führt zu der folgenden Definition (Malle et al. 2010a: 206):

Definition: [...] **Vielfache von Vektoren aus $\mathbb{R}^2$:**

Es [sei] $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ [...] [ein Vektor] aus $\mathbb{R}^2$ und $r \in \mathbb{R}$. Man setzt: [...] $r \cdot A = \begin{pmatrix} r \cdot a_1 \\ r \cdot a_2 \end{pmatrix}$

In Worten: „Ein Vektor wird mit einer reellen Zahl multipliziert, indem man jede Koordinate des Vektors mit der reellen Zahl multipliziert“ (Malle et al. 2010a: 206). Im Gegensatz zu den Schulbüchern *Thema Mathematik für die 5. Klasse* und *Klar² Mathematik 5*, wird hier nicht sofort auf das Parallelitätskriterium verwiesen, dieses wird erst viel später behandelt. Vorerst

liegt der Fokus auf Aufgaben, um einerseits die Rechenoperation durchzuführen und andererseits die Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar algebraisch zu deuten und anzuwenden (Malle et al. 2010a: 207-209). Viele dieser Beispiele ähneln dem Einführungsbeispiel. Des Weiteren werden, wie auch schon bei der Addition, die Rechengesetze dieser Rechenoperation explizit behandelt und deren Anwendung geübt (Malle et al. 2010a: 210). Dadurch wird für SchülerInnen erneut ersichtlich, inwiefern die Vektorrechnung der Rechnung mit reellen Zahlen ähnelt. Im Hinblick auf die geometrische Interpretation der Multiplikation eines Vektors mit einer Zahl ähnelt die Darstellung vor allem jener im Schulbuch *Klar² Mathematik 5* (Binder, Denninger & Urban-Woldron 2010: 193-194). In diesem Schulbuch wird diese Rechenoperation ebenso als „Streckung des Pfeils mit dem Faktor r “ (Malle et al. 2010a: 225) gedeutet. Interessanterweise unterscheiden Malle et al. (2010a: 225) hier aber andere drei Fälle bezüglich der Größe der Zahl r . Der Fall $0 < r < 1$ wird nicht beachtet, die Stauchung wird also nicht explizit erwähnt. Stattdessen wird der Fall $r = 0$ eigens behandelt, da in diesem Fall die Multiplikation mit einem Vektor den Nullvektor ergeben würde. Wie bei Binder, Denninger & Urban-Woldron (2010: 193) wird die Streckung des Vektors über den Strahlensatz hergeleitet. Außerdem werden folgende Anwendungen der bisher vorgestellten Rechenoperationen in Malle et al. (2010a: 227-230) behandelt: die Berechnung des Mittelpunkts einer Strecke, des Schwerpunkts eines Dreiecks und innere und äußere Teilungspunkte einer Strecke. All diese Berechnungen können allein durch die Vektoraddition und die Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar durchgeführt werden.

Das Schulbuch *Dimensionen Mathematik 5* von Bleier et al. (2014: 278) liefert eine ziemlich ausführliche Definition dieser Rechenoperation, ohne aber diese vorher durch ein Beispiel zu motivieren:

Definition:

Ein Vektor wird mit einer reellen Zahl multipliziert, indem jede Komponente des Vektors mit der Zahl multipliziert wird. Das Ergebnis ist ein Vielfaches des ursprünglichen Vektors.

Für Vektoren mit zwei Komponenten gilt:

$$k \cdot \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \cdot x_a \\ k \cdot y_a \end{pmatrix} \text{ bzw. } k \cdot (x_a | y_a) = (k \cdot x_a | k \cdot y_a) \text{ für jede reelle Zahl } k$$

Bei einer Multiplikation mit $\frac{1}{k}$ wird jede Komponente des Vektors durch k dividiert.

$$\frac{1}{k} \cdot \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{k} x_a \\ \frac{1}{k} y_a \end{pmatrix} \text{ bzw. } \frac{1}{k} \cdot (x_a | y_a) = \left(\frac{x_a}{k} \mid \frac{y_a}{k} \right) \text{ für jede reelle Zahl } k (k \neq 0).$$

Im Gegensatz zu den bisher vorgestellten Definitionen dieser Rechenoperation, ist diese bei weitem die ausführlichste. Die Definition enthält sowohl eine Erklärung in Worten, als auch in mathematischen Symbolen. Dabei werden, wie schon bei der Addition, beide Schreibweisen von Vektoren, die Spalten- und Zeilenschreibweise, berücksichtigt. Außerdem wird die Division jeder Komponente eines Vektors durch eine reelle Zahl über die Multiplikation und deren Kehrwert eingeführt und ebenso explizit dargestellt. Dies ist in keinem anderen Schulbuch der Fall. Auch in diesem Schulbuch wird, wie in allen anderen außer Malle et al. (2010a) und Freiler et al. (2015), das Parallelitätskriterium direkt anschließend an die Definition dargestellt (Bleier et al. 2014: 278):

Definition: Parallele Vektoren

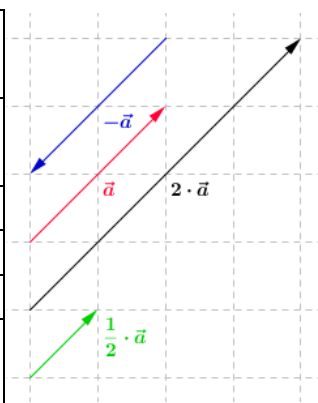
Zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ($\vec{a}, \vec{b} \neq \text{Nullvektor}$) heißen **parallel**, wenn einer von beiden ein Vielfaches des anderen ist.

$$\vec{a} = k \cdot \vec{b} \quad (k \in \mathbb{R})$$

Schreibweise: $\vec{a} \parallel \vec{b}$

Dimensionen Mathematik 5 (Bleier et al. 278) unterscheidet sich von den anderen hier vorgestellten Schulbüchern insofern, dass hier sechs verschiedene Fälle in Abhängigkeit von der Größe der Zahl, mit der der Vektor multipliziert wird, vorgestellt werden:

$k > 0$	$k \cdot \vec{a}$ hat die gleiche Orientierung wie $\vec{a}$
$k < 0$	$k \cdot \vec{a}$ ist entgegengesetzt orientiert zu $\vec{a}$
$k = 0$	$k \cdot \vec{a}$ ist der Nullvektor
$k < -1$ oder $k > 1$	$k \cdot \vec{a}$ ist länger als $\vec{a}$
$0 < k < 1$ oder $-1 < k < 0$	$k \cdot \vec{a}$ ist kürzer als $\vec{a}$
$k = -1$	Der Vektor $(-\vec{a})$ ist gleich lang wie $\vec{a}$ und entgegengesetzt orientiert.



Im Prinzip werden hier nur mehrere Spezialfälle behandelt als in den anderen Schulbüchern. Diese können allerdings ausschlaggebend und damit bedeutend für das Verständnis der SchülerInnen sein. Im Anschluss daran wird ein Musterbeispiel vorgezeigt und schließlich, wie auch in Malle et al. (2010a: 227-230), werden Anwendungen der Rechenoperationen angeführt, wie beispielsweise die Berechnung des Mittelpunkts einer Strecke und des Schwerpunkts eines Dreiecks. Die Übungsbeispiele (Bleier et al. 2014: 279-286) variieren, beschäftigen sich aber zum Großteil mit geometrischen Problemen und Anwendungen in der Physik.

Ähnlich zu Malle et al. (2010a: 206) ist das Einführungsbeispiel, das die Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar in Freiler et al. (2015: 205) motivieren soll. Ein Preisvektor mit fünf Komponenten zeigt die Kosten fünf verschiedener Rubbellose in einer Trafik an. Im Zuge einer Aktion kosten alle fünf Rubbellose um 20% weniger. Die Aufgabe besteht nun darin, den neuen Preisvektor durch eine Multiplikation mit 0,8 darzustellen. Da diese selbstverständlich komponentenweise durchgeführt werden muss, ergibt sich folgende Definition (Freiler et al. 2015: 206):

Rechenregeln für Vektoren:

Seien $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ Vektoren aus $\mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$) und k eine reelle Zahl (auch Skalar genannt),

dann gilt: [...] $k \cdot A = \begin{pmatrix} k \cdot a_1 \\ \vdots \\ k \cdot a_n \end{pmatrix}$

Bei der [...] **Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar** (einer reellen Zahl) erhält man als Ergebnis wieder einen Vektor.

Diese Definition unterscheidet sich nicht wesentlich von den anderen, sie gibt aber wieder im Gegensatz zu den anderen Schulbüchern explizit Rechenregeln für Vektoren mit n Dimensionen, und nicht nur zwei, an. Interessant ist auch, dass zweifach der Begriff Skalar erklärt wird. Der zusätzliche Satz am Ende der Definition ist ebenfalls von großer Bedeutung für SchülerInnen, da diese die Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar unbedingt vom Skalarprodukt unterscheiden können müssen, da dies zwei vollkommen verschiedene Rechenoperationen mit unterschiedlichen Ergebnissen sind.

Folgende BIFIE-Aufgabe (2014: 57) in Abbildung 13 zielt beispielsweise genau auf dieses Wissen ab:

Rechenoperationen bei Vektoren*												
Aufgabennummer: 1_130		Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐										
Aufgabenformat: Multiple Choice (x aus 5)		Grundkompetenz: AG 3.3										
☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☐ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich										
<p>Gegeben sind die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sowie ein Skalar $r \in \mathbb{R}$.</p> <p>Aufgabenstellung:</p> <p>Welche der folgenden Rechenoperationen liefert/liefen als Ergebnis wieder einen Vektor? Kreuzen Sie die zutreffende(n) Antwort(en) an!</p> <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tbody> <tr> <td>$\vec{a} + r \cdot \vec{b}$</td> <td>☐</td> </tr> <tr> <td>$\vec{a} + r$</td> <td>☐</td> </tr> <tr> <td>$\vec{a} \cdot \vec{b}$</td> <td>☐</td> </tr> <tr> <td>$r \cdot \vec{b}$</td> <td>☐</td> </tr> <tr> <td>$\vec{b} - \vec{a}$</td> <td>☐</td> </tr> </tbody> </table>			$\vec{a} + r \cdot \vec{b}$	☐	$\vec{a} + r$	☐	$\vec{a} \cdot \vec{b}$	☐	$r \cdot \vec{b}$	☐	$\vec{b} - \vec{a}$	☐
$\vec{a} + r \cdot \vec{b}$	☐											
$\vec{a} + r$	☐											
$\vec{a} \cdot \vec{b}$	☐											
$r \cdot \vec{b}$	☐											
$\vec{b} - \vec{a}$	☐											

Abbildung 13: BIFIE Aufgabe zu Rechenoperationen bei Vektoren (BIFIE 2014: 57)

Zwei Aufgaben, die das konkrete Durchführen dieser Rechenoperation erfordern, gehen der kurzen Behandlung eines Rechengesetzes im Zuge zweier Beispiele voraus (Freiler et al. 2015: 207-208). Ein paar weitere Beispiele liefern einen passenden Kontext für die Anwendung dieser Rechenoperation in algebraischen Aufgaben, diese ähneln jenen Aufgaben zur Addition in Kapitel 5.3.1. Auch in Freiler et al. (2015: 222) wird das Parallelitätskriterium erst später eingeführt, da vorerst nur die algebraische Seite von Vektoren behandelt wird. Das Parallelitätskriterium unterscheidet sich in seiner Definition kaum von den vorhergehenden Schulbüchern, aber der Fall $k = 0$ für $k \in \mathbb{R}$ wird in diesem Buch ausgeschlossen. Die weiteren Aufgaben erfordern, ebenso ähnlich wie bei den anderen Schulbüchern, das Überprüfen zweier Vektoren auf Parallelität (Freiler et al. 2015: 222-223). Vor dem Parallelitätskriterium wird noch die generelle Darstellung dieser Rechenoperation vorgestellt. Wie auch beim Parallelitätskriterium wird der Fall $r = 0$ für $r \in \mathbb{R}$ ausgenommen. Unterschieden wird zwischen den beiden Fällen $|r| > 1$ und $|r| < 1$. Ersterer führt zu einer Streckung der „zum Vektor dazugehörigen Pfeile mit dem Faktor r “ (Freiler et al. 2015: 221) und zweiterer zur einer Stauchung. Zusätzlich wird angemerkt, dass eine Multiplikation des Vektors mit einer negativen

reellen Zahl zu einer Änderung der „Orientierung der zum Vektor gehörigen Pfeile“ (Freiler et al. 2015: 221) führt. Auffallend ist hier, dass im Gegensatz zu anderen Schulbüchern, äußerst korrekt an der Definition festgehalten wird, die vorschreibt, dass man einem Vektor „genau einen Punkt oder unendlich viele, gleich lange, parallele Pfeile mit gleicher Orientierung zuordnen [kann]“ (Freiler et al. 2015: 213). Die Aufgaben in diesem Schulbuch beschäftigen sich hauptsächlich mit der graphischen Deutung der Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar. Das Beispiel in Abbildung 14 aus dem Aufgabenpools des BIFIE (2014: 51) ähnelt diesen Aufgaben in Freiler et al. (2015: 213) stark:

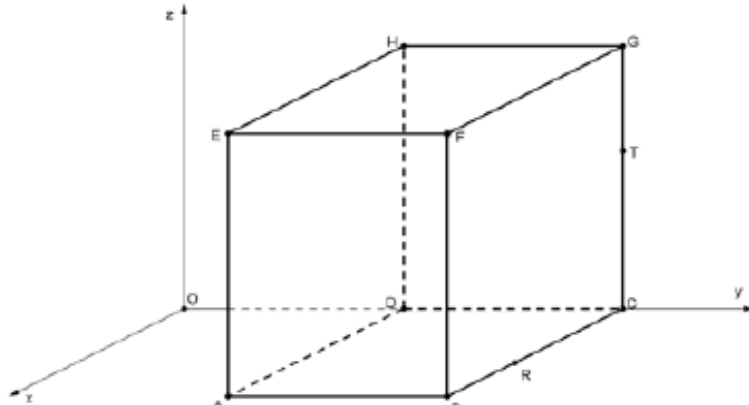
Vektoren in einem Quader												
Aufgabennummer: 1_074		Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐										
Aufgabenformat: Multiple Choice (x aus 5)		Grundkompetenz: AG 3.3										
☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☐ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich										
<p>Die Grundfläche $ABCD$ des dargestellten Quaders liegt in der xy-Ebene. Festgelegt werden die Vektoren $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$ und $\vec{c} = \overrightarrow{AE}$.</p>  <p>Aufgabenstellung:</p> <p>Welche der folgenden Darstellungen ist/sind möglich, wenn $s, t \in \mathbb{R}$ gilt?</p> <p>Kreuzen Sie die zutreffende(n) Aussage(n) an!</p> <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tbody> <tr> <td>$\overrightarrow{TC} = t \cdot \vec{c}$</td> <td>☐</td> </tr> <tr> <td>$\overrightarrow{AR} = t \cdot \vec{a}$</td> <td>☐</td> </tr> <tr> <td>$\overrightarrow{EG} = s \cdot \vec{a} + t \cdot \vec{b}$</td> <td>☐</td> </tr> <tr> <td>$\overrightarrow{BT} = s \cdot \vec{a} + t \cdot \vec{b}$</td> <td>☐</td> </tr> <tr> <td>$\overrightarrow{TR} = s \cdot \vec{b} + t \cdot \vec{c}$</td> <td>☐</td> </tr> </tbody> </table>			$\overrightarrow{TC} = t \cdot \vec{c}$	☐	$\overrightarrow{AR} = t \cdot \vec{a}$	☐	$\overrightarrow{EG} = s \cdot \vec{a} + t \cdot \vec{b}$	☐	$\overrightarrow{BT} = s \cdot \vec{a} + t \cdot \vec{b}$	☐	$\overrightarrow{TR} = s \cdot \vec{b} + t \cdot \vec{c}$	☐
$\overrightarrow{TC} = t \cdot \vec{c}$	☐											
$\overrightarrow{AR} = t \cdot \vec{a}$	☐											
$\overrightarrow{EG} = s \cdot \vec{a} + t \cdot \vec{b}$	☐											
$\overrightarrow{BT} = s \cdot \vec{a} + t \cdot \vec{b}$	☐											
$\overrightarrow{TR} = s \cdot \vec{b} + t \cdot \vec{c}$	☐											

Abbildung 14: BIFIE Aufgabe zu Vektoren in einem Quader (BIFIE 2014: 51)

SchülerInnen müssen, um diese Aufgabe korrekt lösen zu können, sowohl die geometrische Darstellung der Vektoraddition, als auch der Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar, verstehen und deuten können. Dabei ist die Größe der reellen Zahlen s und t nicht relevant. Bedeutend ist aber, dass s und t sowohl positive, als auch negative Werte annehmen können, denn beispielsweise in der ersten und letzten Antwortmöglichkeit müsste t eine negative reelle Zahl sein.

Dazu zeigt Jarmers Studie (1995: 68-78), dass SchülerInnen zumindest damals grundsätzlich kein Problem mit dem Verständnis der geometrischen Bedeutung der Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar hatten. Jedoch scheinen viele Lernende dabei gefährdet zu sein, einen Vektorpfeil mit dessen Länge zu identifizieren. Ein/e Schülerin antwortet zum Beispiel auf die Frage, was $3 \cdot \vec{a}$ bedeuten würde: „Man addiert zum Vektor $\vec{a}$ noch dreimal die Länge vom Vektor $\vec{a}$ “ (Jarmer 1995: 69).

5.3.3 Skalarprodukt von Vektoren

Das Skalarprodukt, oder skalare Produkt, wird im Schulbuch *Thema Mathematik für die 5. Klasse* von Brand et al. (2009: 188) mit Hilfe eines Beispiels motiviert, welches die Multiplikation des Preisvektors mit dem Stückzahlenvektor erfordert, da die jeweilige Anzahl mit dem zugehörigen Preis multipliziert und die verschiedenen Produkte dann aufsummiert werden müssen. Bereits hier, schon vor der Einführung der Definition dieser Rechenoperation, wird darauf hingewiesen, dass „zwar Vektoren ‚multipliziert‘ wurden, das Ergebnis aber eine reelle Zahl ist“ (Brand et al. 2009: 188). Folgende Definition wird anschließend vorgestellt (Brand et al. 2009: 188):

Definition: *Skalares Produkt der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$*

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2$$

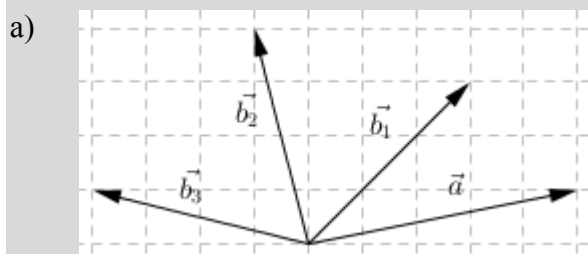
Obwohl diese Definition wieder nur für Vektoren aus dem $\mathbb{R}^2$ eingeführt wird, wird etwas weiter unten auf derselben Seite darauf hingewiesen, dass die Rechenoperation für Vektoren mit mehr als zwei Komponenten analog durchgeführt werden kann. Die Sinnhaftigkeit dessen wird auch anhand eines Musterbeispiels mit Lösung gezeigt. Aufgabe 1094 (Brand et al. 2009: 189) verlangt sogar die Definition des Skalarprodukts zweier Vektoren aus dem $\mathbb{R}^3$, die zwei darauffolgenden Aufgaben erfordern das Berechnen des skalaren Produkts von Vektoren mit mehr als zwei Komponenten. Wie bei der Addition und Subtraktion zweier Vektoren liefern

Brand et al. (2009: 189) vorerst einige rein algebraisch zu lösende Übungsaufgaben, wie beispielsweise folgende:

1088) 23 Personen bezahlen 5,50€ für den Eintritt, 17 von ihnen bezahlen zusätzlich 8,20€ für die Fahrt. Stelle einen Vektor für die Anzahl der Personen und einen Vektor für die Preise auf und berechne die Gesamtkosten mithilfe des skalaren Produkts der beiden Vektoren.

Weitere Aufgaben fokussieren sich dann stark auf den geometrischen Aspekt dieser Rechenoperation. Dabei wird allerdings keine explizite Erklärung abgegeben, was die verschiedenen möglichen Ergebnisse des skalaren Produkts bedeuten könnten, sondern eine Aufgabe führt SchülerInnen selbst zu dieser Erkenntnis (Brand et al. 2009: 189)⁸:

1091) Entnimm die Angaben der Abbildung und berechne die skalaren Produkte $\vec{a} \cdot \vec{b}_1$, $\vec{a} \cdot \vec{b}_2$ und $\vec{a} \cdot \vec{b}_3$. Wann ist das Ergebnis positiv, negativ oder null?



Nun sollen die SchülerInnen anhand dieses Beispiels erkennen, welche Bedeutung dem Skalarprodukt geometrisch zukommt und dieses Wissen durch die darauffolgenden Beispiele festigen.

Binder, Denninger & Urban-Woldron (2010: 201) wählen in ihrem Schulbuch *Klar² Mathematik 5* erneut einen rein geometrischen Ansatz zur Einführung des Skalarprodukts. Dabei werden vorerst nach links und rechts gekippte Normalvektoren eingeführt, welche in Kapitel 5.5 behandelt werden. Um die Definition des Skalarprodukts zu motivieren, wird der Spezialfall zweier normal aufeinander stehender Vektoren betrachtet. Dabei macht man sich folgende Eigenschaft zu Nutze: „Jeder Normalvektor eines Vektors $\vec{a}$ ist parallel zu dem um 90° nach rechts ($\vec{a}_R$) bzw. links ($\vec{a}_L$) gekippten Vektor“ (Binder, Denninger & Urban-Woldron 2010: 201). Daher gilt für die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix}$ folgendes:

⁸ Es wird hier nur die Unteraufgabe a) vorgestellt, da sie für den Zweck hier ausreichend ist.

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{b} \parallel \vec{a}_R \Leftrightarrow \vec{b} = v \cdot \vec{a}_R \Leftrightarrow \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix} = v \cdot \begin{pmatrix} a_y \\ -a_x \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \cdot a_y \\ v \cdot (-a_x) \end{pmatrix}$$

Durch Vergleich der Koordinaten und anschließende Elimination des Faktors v erhält man:

$$[\dots] \vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y = 0$$

Von der letzten Äquivalenzrelation dieser Herleitung wird hier nur die Hinrichtung bewiesen, der Beweis der Rückrichtung erfolgt wenig später nach der Einführung der Definition des Skalarprodukts und des Orthogonalitätskriteriums. Die Definition lautet in Binder, Denninger & Urban-Woldron (2010: 201) wie folgt:

Sind $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix}$ zwei Vektoren, dann heißt die reelle Zahl

$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y$ **skalares Produkt** oder **Skalarprodukt** der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

Und direkt darunter das Orthogonalitätskriterium (Binder, Denninger & Urban-Woldron 2010: 201):

Orthogonalitätskriterium: $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y = 0$

Zwei Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ sind genau dann zueinander orthogonal, wenn ihr skalares Produkt null ergibt.

Interessanterweise heben (Binder, Denninger & Urban-Woldron 2010: 201) im Gegensatz zu Brand et al. (2009) sofort die geometrische Bedeutung des Skalarprodukts betreffend des Orthogonalitätskriteriums hervor, jedoch wird nicht erklärt, was ein Ergebnis aus den positiven und negativen reellen Zahlen jeweils bedeutet. Der Zusammenhang zwischen einem negativen Ergebnis des Skalarprodukts zweier Vektoren und dem stumpfen Winkel, der zwischen den Pfeildarstellungen dieser beider Vektoren besteht, sowie einem positiven Ergebnis und dem spitzen Winkel, wird weder im Theorieteil des Kapitels noch in den Übungsbeispielen behandelt. Das Skalarprodukt beschäftigt sich sowohl in den theoretischen Erklärungen, als auch in den praktischen Anwendungsbeispielen nur mit der Frage, ob zwischen den Pfeildarstellungen zweier Vektoren ein rechter Winkel vorliegt oder nicht.

In den Beispielen aus dem Aufgabenpool des BIFIE ist das Orthogonalitätskriterium ebenso von größter Bedeutung. Bei folgender Aufgabe in Abbildung 15 ist beispielsweise nur die Kenntnis des Orthogonalitätskriteriums notwendig, um festzustellen, ob keine, eine oder beide der letzten beiden Antwortmöglichkeiten richtig sind (BIFIE 2014: 53):

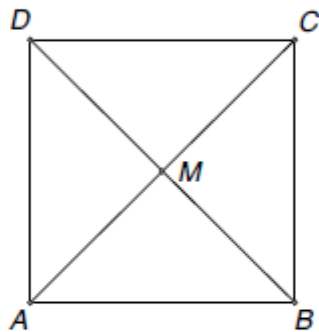
Quadrat*												
Aufgabennummer: 1_115	Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐											
Aufgabenformat: Multiple Choice (2 aus 5)	Grundkompetenz: AG 3.3											
☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☐ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich										
<p>A, B, C und D sind Eckpunkte des unten abgebildeten Quadrates, M ist der Schnittpunkt der Diagonalen.</p> <div style="text-align: center; margin: 20px 0;">  </div> <p>Aufgabenstellung:</p> <p>Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Aussagen an!</p> <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto; border-collapse: collapse;"> <tbody> <tr> <td style="padding: 5px;">$C = A + 2 \cdot \overrightarrow{AM}$</td> <td style="width: 40px; text-align: center; padding: 5px;">☐</td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;">$B = C + \overrightarrow{AD}$</td> <td style="text-align: center; padding: 5px;">☐</td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;">$M = D - \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{DB}$</td> <td style="text-align: center; padding: 5px;">☐</td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;">$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$</td> <td style="text-align: center; padding: 5px;">☐</td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;">$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$</td> <td style="text-align: center; padding: 5px;">☐</td> </tr> </tbody> </table>			$C = A + 2 \cdot \overrightarrow{AM}$	☐	$B = C + \overrightarrow{AD}$	☐	$M = D - \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{DB}$	☐	$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$	☐	$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$	☐
$C = A + 2 \cdot \overrightarrow{AM}$	☐											
$B = C + \overrightarrow{AD}$	☐											
$M = D - \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{DB}$	☐											
$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$	☐											
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$	☐											

Abbildung 15: BIFIE Aufgabe zum Quadrat (BIFIE 2014: 53)

Die ersten drei Antwortmöglichkeiten erfordern das Verständnis der bisher eingeführten Rechenoperationen, also der Addition und Subtraktion zweier Vektoren sowie der Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar.

In diesem Schulbuch sind auch anspruchsvollere Aufgaben als in Brand et al. (2009) zu finden, wie etwa in folgender Aufgabe (Binder, Denninger & Urban-Woldron 2010: 208):

5.31) Von einem Quadrat kennt man jeweils die Koordinaten zweier Eckpunkte. Berechne die Koordinaten der unbekannten Eckpunkte.

a) $A(-4|-3)$, $B(5|2)$

In Malle et al. (2010a: 211) wird das Skalarprodukt, wie zuvor schon die anderen Rechenoperationen, zuerst im Kapitel, welches sich ausschließlich mit Vektoren als algebraische Elemente beschäftigt, eingeführt und später in jenem Kapitel, das die geometrischen Darstellungsmöglichkeiten von Vektoren behandelt, ebenso geometrisch diskutiert. Wie auch Brand et al. (2009: 188) motivieren Malle et al. (2010a: 211) das Skalarprodukt mittels eines anwendungsorientierten Beispiels, welches die Multiplikation eines Stückzahlenvektors mit einem Stückpreisvektor erfordert. Anschließend wird das Skalarprodukt folgendermaßen definiert (Malle et al. 2010a: 211):

Definition: Es seien $A, B \in \mathbb{R}^2$. Die reelle Zahl

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2$$

heißt skalares Produkt bzw. Skalarprodukt der Vektoren A und B .

Auch hier wird wie bei Brand et al. (2009: 188) explizit darauf hingewiesen, dass das Produkt zweier Vektoren ein Skalar und keinen Vektor ergibt. Die darauffolgenden Beispiele (Malle et al. 2010a: 211) erfordern das Verständnis und die Berechnung des Skalarprodukts in verschiedenen gegebenen Kontexten, wie auch Aufgabe 11.42):

11.42) Ein Händler bestellt zwei Waren. Von der ersten Ware mit dem Stückpreis 50€ bestellt er 3 Stück, von der zweiten mit dem Stückpreis 1€ bestellt er 125 Stück. Schreibe einen Vektor S an, der die beiden Stückzahlen angibt, und einen Vektor P , der die beiden Preise angibt! Was bedeutet $S \cdot P$? Berechne $S \cdot P$!

Des Weiteren werden, wie bereits bei der Vektoraddition und der Multiplikation eines Vektors mit einer Zahl, die Rechengesetze für das Skalarprodukt behandelt und teilweise bewiesen (Malle et al. 2010a: 213). Die geometrische Bedeutung des Skalarprodukts wird in diesem Schulbuch erst viel später diskutiert (Malle et al. 2010a: 241-244). Hierbei wird aber zuerst die Formel für die Berechnung des Winkelmaßes zweier vom Nullvektor verschiedene Vektoren eingeführt. Bevor diese jedoch besprochen werden kann, muss zuerst der Begriff ‚Winkelmaß zweier Vektoren‘ selbst definiert werden (Malle et al. 2010a: 241):

Definition: Zwei vom Nullvektor verschiedene Vektoren $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}$ seien durch Pfeile von einem gemeinsamen Anfangspunkt aus dargestellt. Das Maß φ des Winkels, den diese beiden Pfeile miteinander einschließen, nennt man das Winkelmaß der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

Hier merkt man erneut, dass Malle et al. (2010a) bedacht darauf sind, Vektoren als algebraische Objekte zu betrachten, die geometrisch dargestellt werden können. Mit Hilfe des Cosinussatzes

wird schließlich folgende Formel für die Berechnung des Winkelmaßes zweier vom Nullvektor verschiedene Vektoren eingeführt (Malle et al. 2010a: 241):

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

Nun können für das Skalarprodukt folgende drei Fälle anhand des Vorzeichens unterschieden werden (Malle et al. 2010a: 242):

Da $|\vec{a}|$ und $|\vec{b}|$ positiv sind folgt daraus:

$\vec{a} \cdot \vec{b} > 0 \Leftrightarrow 0^\circ \leq \varphi < 90^\circ$	spitzer Winkel
$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \varphi = 90^\circ$	rechter Winkel
$\vec{a} \cdot \vec{b} < 0 \Leftrightarrow 90^\circ < \varphi \leq 180^\circ$	stumpfer Winkel

In diesem Schulbuch wird also explizit auf diese drei verschiedenen Fälle und deren Bedeutung hingewiesen, wobei der wichtigste Fall, nämlich der zweite, noch einmal in einer eigenen Definition hervorgehoben wird, da dieser am häufigsten in Beispielen, vor allem in jenen zur Übung der Grundkompetenzen, anzutreffen ist (Malle et al. 2010a: 243):

Definition: Für alle vom Nullvektor verschiedene Vektoren $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^2$ setzen wir:

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

Dementsprechend erfordern die Übungsaufgaben das Wissen und Anwenden der oberen Fallunterscheidung, um einerseits einfach zwei Vektoren auf ihre Orthogonalität zu prüfen und andererseits dies auch beispielsweise zur Bestimmung der Art des Vierecks verwenden zu können.

In Bleier et al. (2014: 291) wird das Skalarprodukt im Gegensatz zu den anderen Schulbüchern einfach mittels einer Definition eingeführt:

Definition:

Das Produkt zweier Vektoren

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \end{pmatrix} = x_a \cdot x_b + y_a \cdot y_b$$

heißt **Skalarprodukt**. Das Ergebnis ist eine Zahl. Das skalare Produkt wird nach der Regel **Produkt der x-Komponenten + Produkt der y-Komponenten** berechnet.

- Statt $\vec{a} \cdot \vec{b}$ kann auch einfach $\vec{a}\vec{b}$ (ohne Punkt) geschrieben werden.
- Statt $\vec{a} \cdot \vec{a}$ kann auch $\vec{a}^2$ geschrieben werden. [...]

Nach einem kurzen Musterbeispiel, das die Berechnung des Skalarprodukts zweier Vektoren zeigt, wird ebendieses auch für Vektoren mit n Komponenten analog definiert. Auffallend an dieser Definition sind die beiden Anmerkungen zum Schluss, wobei vor allem letztere von Bedeutung ist. Folgendes Beispiel in Abbildung 16 aus dem BIFIE Aufgabenpool erfordert ein tieferes Verständnis, was das Skalarprodukt und die Schreibweise $\vec{a}^2$ bedeuten (BIFIE 2014: 47):

Vektoren im Dreieck												
Aufgabennummer: 1_057		Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐										
Aufgabenformat: Multiple Choice (2 aus 5)		Grundkompetenz: AG 3.3										
☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☐ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich										
<p>Ein Dreieck ABC ist rechtwinklig mit der Hypotenuse AB.</p> <p>Aufgabenstellung: Welche der folgenden Aussagen sind jedenfalls richtig? Kreuzen Sie die beiden entsprechenden Aussagen an!</p> <table border="1"> <tbody> <tr> <td>$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$</td> <td>☐</td> </tr> <tr> <td>$\overrightarrow{AB}^2 = \overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{BC}^2$</td> <td>☐</td> </tr> <tr> <td>$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}$</td> <td>☐</td> </tr> <tr> <td>$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AC}$</td> <td>☐</td> </tr> <tr> <td>$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$</td> <td>☐</td> </tr> </tbody> </table>			$ \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} $	☐	$\overrightarrow{AB}^2 = \overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{BC}^2$	☐	$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}$	☐	$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AC}$	☐	$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$	☐
$ \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} $	☐											
$\overrightarrow{AB}^2 = \overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{BC}^2$	☐											
$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}$	☐											
$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AC}$	☐											
$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$	☐											

Abbildung 16: BIFIE Aufgabe zu Vektoren im Dreieck (BIFIE 2014: 47)

Die zweite Antwortmöglichkeit verwendet genau die in obiger Definition angesprochene Schreibweise. Welche Bedeutung hinter dem Skalarprodukts eines Vektors mit sich selbst steckt, wird auch in Bleier et al. (2014) nicht klar hervorgehoben. Der springende Punkt beim Lösen dieser Aufgabe ist zu erkennen, dass das Skalarprodukt eines Vektors mit sich selbst genau das Quadrat der Länge des Pfeils, der diesen Vektor darstellt, beschreibt, denn es gilt für $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$:

$$\vec{a}^2 = \vec{a} \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = a_1 \cdot a_1 + a_2 \cdot a_2 = a_1^2 + a_2^2 = |\vec{a}|^2$$

Auch in Bleier et al. (2014: 292) werden, wie schon bei Malle et al. (2010a: 213), die Rechenregeln des Skalarprodukts behandelt. Algebraische Beispiele wie in Brand et al. (2009) und Malle et al. (2010a) sind bei Bleier et al. (2014) allerdings nicht zu finden. Auch auf die

geometrische Bedeutung des Skalarprodukts gehen Bleier et al. (2014: 297) erst später und nur sehr kurz ein. Hier wird, wie bei Binder, Denninger & Urban-Woldron (2010), nicht auf die verschiedenen Möglichkeiten für die Ergebnisse des Skalarprodukts eingegangen. Insgesamt wird das Skalarprodukt jedoch nicht direkt mit seiner geometrischen Deutung in Verbindung gebracht, aber auch in keinen für SchülerInnen nachvollziehbaren algebraischen Kontext gesetzt, sondern als reine Rechenoperation betrachtet (Bleier et al. 2014: 291).

Freiler et al. (2015: 209) führen, wie auch Brand et al. (2009: 188) und Malle et al. (2010a: 211), diese Rechenoperation mit Hilfe eines anschaulichen Beispiels ein, das durch die Multiplikation zweier Vektoren gelöst werden muss, wobei ein Vektor die Kosten verschiedener Produkte und der andere die Anzahl der verkauften Produkte darstellt. Auch hier wird darauf hingewiesen, dass die Multiplikation zweier Vektoren eine reelle Zahl ergibt. Folgende Definition wird schließlich in Freiler et al. (2015: 209) vorgestellt:

Skalares Produkt zweier Vektoren

Seien $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ Vektoren im $\mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$). Dann nennt man

$$A \cdot B = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + \dots + a_n \cdot b_n$$

das **skalare Produkt** dieser beiden Vektoren.

Das Ergebnis der Multiplikation zweier Vektoren ist eine reelle Zahl (Skalar).

Wie bei den vorigen Rechenoperationen findet man auch hier eine Anweisung für die Verwendung von GeoGebra und dem TI-Nspire, wobei vor allem die Anweisung $\text{dotP}(u, v)$ für zwei bereits definierte Vektoren u und v ohne Anleitung eventuell nicht offensichtlich ist. Freiler et al. (2015: 210-211) bietet verschiedene Kontexte zur algebraischen Anwendung des Skalarprodukts, wobei auffällt, dass im Gegensatz zu Brand et al. (2009: 189) nicht nur Beispiele mit Vektoren mit zwei Komponenten inkludiert werden. Dieser Fokus auf die Interpretation des Skalarprodukts in verschiedenen Kontexten ist von großer Bedeutung, da beispielsweise folgende Aufgabe in Abbildung 17 aus dem Haupttermin der standardisierten Reifeprüfung vom 11. Mai 2015 (BIFIE 2015a: 7) genau das erfordert:

Aufgabe 3

Gehälter

Die Gehälter der 8 Mitarbeiter/innen eines Kleinunternehmens sind im Vektor $G = \begin{pmatrix} G_1 \\ G_2 \\ \vdots \\ G_8 \end{pmatrix}$ dargestellt.

Aufgabenstellung:

Geben Sie an, was der Ausdruck (das Skalarprodukt) $G \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ in diesem Kontext bedeutet!

Abbildung 17: Aufgabe der standardisierten Reifeprüfung vom 11. Mai 2015 (BIFIE 2015a: 7)

Die Rechengesetze des Skalarprodukts werden nur in Beispielen diskutiert, aber nicht von Freiler et al. (2015) im Theorieteil des Kapitels eingeführt.

Ähnlich wie in Bleier et al. (2014) wird die geometrische Bedeutung des Skalarprodukts nur im Zuge des Orthogonalitätskriteriums betrachtet (Freiler et al. 2015: 234). Dabei wird nur der Spezialfall, dass das Skalarprodukt null ergibt, diskutiert. Die Fallunterscheidung beziehungsweise der Zusammenhang zur Formel für die Berechnung des Winkelmaßes zwischen zwei Vektoren werden nicht vorgestellt. Die Übungsaufgaben (Freiler et al. 2015: 234-235) ähneln jenen in Malle et al. (2010a: 243-244).

Abschließend zu diesem Kapitel über die Rechenoperationen soll hier noch ein Beispiel aus dem BIFIE Aufgabenpool vorgestellt werden, dessen Lösung alle in diesem Abschnitt besprochenen Rechenoperationen erfordert (BIFIE 2014: 59):

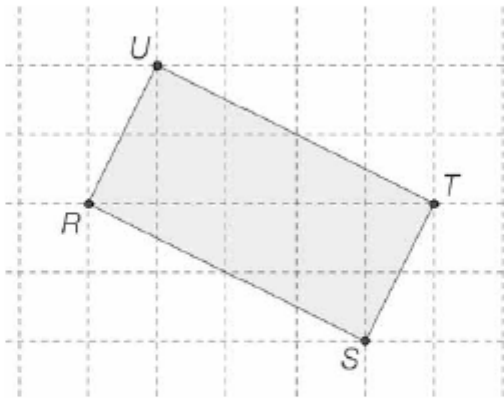
Rechteck*												
Aufgabennummer: 1_133	Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐											
Aufgabenformat: Multiple Choice (2 aus 5)	Grundkompetenz: AG 3.3											
☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☐ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich										
<p>Abgebildet ist das Rechteck $RSTU$.</p> <div style="text-align: center; margin: 20px 0;">  </div> <p>Aufgabenstellung:</p> <p>Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Aussagen an!</p> <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto; border-collapse: collapse;"> <tbody> <tr> <td style="padding: 5px;">$\vec{ST} = -\vec{RU}$</td> <td style="width: 50px; text-align: center; padding: 5px;">☐</td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;">$\vec{SR} \parallel \vec{UT}$</td> <td style="text-align: center; padding: 5px;">☐</td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;">$\vec{RS} + \vec{ST} = \vec{TR}$</td> <td style="text-align: center; padding: 5px;">☐</td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;">$U = T + \vec{SR}$</td> <td style="text-align: center; padding: 5px;">☐</td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;">$\vec{RT} \cdot \vec{SU} = 0$</td> <td style="text-align: center; padding: 5px;">☐</td> </tr> </tbody> </table>			$\vec{ST} = -\vec{RU}$	☐	$\vec{SR} \parallel \vec{UT}$	☐	$\vec{RS} + \vec{ST} = \vec{TR}$	☐	$U = T + \vec{SR}$	☐	$\vec{RT} \cdot \vec{SU} = 0$	☐
$\vec{ST} = -\vec{RU}$	☐											
$\vec{SR} \parallel \vec{UT}$	☐											
$\vec{RS} + \vec{ST} = \vec{TR}$	☐											
$U = T + \vec{SR}$	☐											
$\vec{RT} \cdot \vec{SU} = 0$	☐											

Abbildung 18: BIFIE Aufgabe zum Rechteck (BIFIE 2014: 59)

Diese Aufgabe erfordert sowohl die Kenntnis des Parallelitätskriteriums und des Orthogonalitätskriteriums, das Verständnis der Bedeutung von Gegenvektoren sowie die Anwendung verschiedener Rechenoperationen und der eben genannten Kriterien.

5.4 Geraden im $\mathbb{R}^2$ (und im $\mathbb{R}^3$) – AG 3.4

Die Grundkompetenz AG 3.4 behandelt Geraden in der Ebene und im Raum: „Geraden durch (Parameter-)Gleichungen in $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$ angeben können; Geradengleichungen interpretieren können; Lagebeziehungen (zwischen Geraden und zwischen Punkt und Gerade) analysieren, Schnittpunkte ermitteln können“ (Liebscher et al. 2013: 9). Eben diese Aspekte, die hier genannt werden, werden im folgenden Abschnitt behandelt. Hierbei werden die ersten beiden

Punkte, die Angabe und Interpretation von Geradengleichungen, einerseits im Hinblick auf die Parameterdarstellung von Geraden und andererseits hinsichtlich der Normalvektordarstellung beleuchtet. Die Hauptform der Geradengleichung $y = k \cdot x + d$ mit $k, d \in \mathbb{R}$ sowie die allgemeine Form der Geradengleichung $a \cdot x + b \cdot y = c$ mit $a, b, c \in \mathbb{R}$ werden nur im Zusammenhang mit der Parameterdarstellung und der Normalvektordarstellung von Geraden betrachtet, denn deren intensivere und detailliertere Betrachtung ist in der Grundkompetenz FA 2 (Funktionale Abhängigkeiten) zu linearen Funktionen verankert (Liebscher et al. 2013: 11). Hauptsächlich werden in diesem Abschnitt die Geraden im $\mathbb{R}^2$ behandelt, aber auch die Erweiterung um eine Dimension wird etwas näher beleuchtet.

5.4.1 Parameterdarstellung von Geraden im $\mathbb{R}^2$ (und im $\mathbb{R}^3$)

Das Schulbuch *Thema Mathematik für die 5. Klasse* von Brand et al. (2009: 210) ordnet diesen Lehrinhalt dem Kapitel „Analytische Geometrie der Ebene“ zu. Der erste Abschnitt dieses Kapitels behandelt die Parameterform der Geradengleichung. Diese wird durch ein anschauliches Beispiel der Bewegung einer Kugel am Billardtisch motiviert. Dabei wird angenommen, dass die beobachtete Kugel nicht gegen andere Kugeln oder die Wand stößt. Dass eine Kugel trotzdem nicht unbedingt gerade rollen muss, dies wahrscheinlich sogar nur in den seltensten Fällen tatsächlich tut, und die Feststellung der Position der Kugel nach jeder Sekunde nicht zu folgendem Ergebnis führen kann, da sich die Geschwindigkeit der Kugel verändert, während sie rollt, wird hier kommentarlos vernachlässigt (Brand et al. 2009: 210):

$$t = 0 \text{ s:} \quad X(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$t = 1 \text{ s:} \quad X(1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$t = 2 \text{ s:} \quad X(2) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Allgemein:

$$X(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 + 2 \cdot t \\ 0 + 1 \cdot t \end{pmatrix}$$

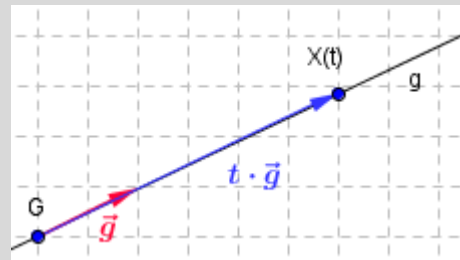
Trotzdem ist das Beispiel anschaulich und realistisch und daher für SchülerInnen eine mögliche Motivation für die Angabe von Geraden in Parameterform, so wie sie nun definiert wird (Brand et al. 2009: 210):

Parameterform der Geradengleichung:

Für alle Punkte X auf der Geraden g , die durch einen Punkt G geht und die Richtung $\vec{g}$ hat, gilt:

$$g: X = G + t \cdot \vec{g} \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \dots \text{allg. Punkt}$$

$\vec{g}$... Richtungsvektor von g . RV (g)



Direkt unter dieser Definition befindet sich ein Hinweis, der besagt, dass es für eine Gerade unendlich viele Parameterformen gibt, die diese darstellen, da der Punkt G ein beliebiger Punkt auf der Geraden ist und auch der Vektor $\vec{g}$ ein beliebiger Vektor, der die Richtung der Gerade angibt, ist. Außerdem wird in diesem Hinweis angemerkt, dass t eine reelle Zahl ist (Brand et al. 2009: 210). Obwohl das Einführungsbeispiel und die Skizze zu der Definition sehr anschaulich sind, wäre es sinnvoll auch zu besprechen, inwiefern durch so eine Darstellung tatsächlich jeder Punkt einer Geraden dargestellt werden kann, nämlich auch durch negative t . Das darauffolgende Musterbeispiel behandelt nicht nur die Angabe der Parameterform einer Geraden, sondern die Feststellung, ob drei gegebene Punkte A , B und C auf einer Geraden liegen. Dies ist insofern wichtig, da SchülerInnen bei der Lösung sehen können, dass komponentenweise Gleichungen aufgestellt und gelöst werden können, um Probleme hinsichtlich der Geraden in Parameterform zu lösen. Eine Aufgabe dieser Art kann jedoch auch gelöst werden, indem man beispielsweise zwei Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$ aufstellt und diese auf ihre Parallelität überprüft. Beim Aufstellen der Geraden durch die Punkte A und B erweist sich die im vorhergehenden Kapitel erhaltene Information, dass bei Vektoren, deren Richtung essentiell, aber deren Länge irrelevant sind, die kleinstmöglichen Koordinaten gewählt werden sollen (Brand et al. 2009: 186), als bedeutend. Des Weiteren ist es für SchülerInnen auch hilfreich durch diese Aufgabe darauf hinzuweisen, dass man Geraden durch zwei gegebene Punkte bestimmen kann, wie es das Beispiel 1211 (Brand et al. 2009: 211) verlangt. Die meisten Aufgaben erfordern das Einsetzen verschiedener Zahlen für den Parameter t . Weitere Übungsaufgaben beschäftigen sich mit dem Wechsel zwischen der Parameterform einer Geraden und der Darstellung $y = k \cdot x + d$, wobei in der ersten dieser Aufgaben dezidiert angegeben wird, dass der Richtungsvektor der Geraden zu dem Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ k \end{pmatrix}$ parallel ist (Brand et al. 2009: 211). Dieses Wissen ist beispielsweise für die Lösung des folgenden Beispiels in Abbildung 19 aus dem Aufgabenpool des BIFIE (2014: 67) möglicherweise anzuwenden, obwohl dies umständlich wäre:

Gerade in Parameterform*		
Aufgabennummer: 1_132		Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: offenes Format		Grundkompetenz: AG 3.4
☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☐ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich
<p>Gegeben ist die Gerade g mit der Gleichung $3x - 4y = 12$.</p> <p>Aufgabenstellung:</p> <p>Geben Sie eine Gleichung von g in Parameterform an!</p>		

Abbildung 19: BIFIE Aufgabe zur Gerade in Parameterform ⁹(BIFIE 2014: 67)

Bei dieser Aufgabe wäre aber die Umformung auf die Form $g: y = k \cdot x + d$ komplizierter als den Normalvektor der Geraden direkt abzulesen, diese Darstellung der Geradengleichung also als Normalvektordarstellung zu interpretieren und so einen Richtungsvektor aufzustellen.

Die Übertragung des in der fünften Klasse angeeigneten Wissen über die Vektoren auf den $\mathbb{R}^3$ wird im Buch für die sechste Klasse (Brand et al. 2010: 102) nur relativ kurz behandelt. Es wird dezidiert darauf hingewiesen, dass das Wissen über Vektoren im $\mathbb{R}^2$ auf Vektoren im $\mathbb{R}^3$ übertragen werden kann und „lediglich eine Koordinate hinzu[kommt]“ (Brand et al. 2010: 102).

Binder, Denninger & Urban-Woldron (2010: 209-211) unterscheiden in ihrem Schulbuch *Klar² Mathematik 5* zwischen der Festlegung einer Geraden durch einen gegebenen Punkt und einen Richtungsvektor auf der einen Seite und durch zwei Punkte auf der anderen Seite. Hinsichtlich der Aufstellung einer Geraden durch einen Punkt und einen Richtungsvektor bieten Binder, Denninger & Urban-Woldron (2010: 209) zwei Möglichkeiten zur Darstellung einer Geraden in Parameterform an. Einerseits führen sie selbige Gleichung $X = P + t \cdot \vec{a}$ wie Brand et al. (2009: 210) ein, andererseits interpretieren sie die Gleichung als Vektoraddition mit Hilfe der Ortsvektoren, wodurch sich die Gleichung $g: \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + t \cdot \vec{a}$ ergibt. Dabei wird betont, dass die beiden Gleichungen „gleichwertig“ sind und „nur eine unterschiedliche Interpretation wider[spiegeln]“ (Binder, Denninger & Urban-Woldron 2010: 210). Es taucht aber auch in diesem Schulbuch das in Kapitel 4.2.1 diskutierte Problem auf, dass die Skizze

⁹ In der Aufgabensammlung gibt das BIFIE zu dieser Aufgabe folgendes an: * Diese Aufgabe wurde dem im Oktober 2013 publizierten Kompetenzcheck (vgl. <https://www.bifie.at/node/2389>) entnommen.

neben der Erklärung durch die zusätzlichen Ortspfeile ziemlich unübersichtlich erscheint und, wie Malle (2007: 88) betont, „einem gekünstelten, unnatürlichen Denken“ entspricht. Für erstere Gleichung liefern Binder, Denninger & Urban-Woldron (2010: 209) folgende Erklärung: „Sind von einer Geraden g ein Punkt P und ein Vektor $\vec{a}$, der die Richtung der Geraden g festlegt, bekannt, so existiert für jeden Punkt X der Geraden g eine reelle Zahl t , sodass X von P aus mit $t \cdot \vec{a}$ erreicht wird.“ Diese Erklärung unterscheidet sich von der in Brand et al. (2009: 210) vorgestellten Definition, da der Fokus hier auf der Existenz der reellen Zahl t liegt und nicht einfach nur eine Gleichung präsentiert wird. Dies unterstützt SchülerInnen beim Verständnis von Aufgaben, bei denen man überprüfen muss, ob ein Punkt auf einer Geraden liegt, da verschiedene Ergebnisse für t beim komponentenweisen Lösen verständlicherweise zu einem Widerspruch mit der Erklärung von Binder, Denninger & Urban-Woldron (2010: 209) führen. Nach einer ausführlichen Erklärung der beiden Interpretationsmöglichkeiten der Parameterform einer Geraden folgt ein Beispiel, bei dem weitere Punkte, die auf einer gegebenen Geraden liegen, berechnet werden müssen. In Anlehnung an die Erklärung der Darstellung einer Geraden in Parameterform durch einen gegebenen Punkt und einen Richtungsvektor wird nun erklärt, wie eine Gerade durch zwei Punkte aufgestellt werden kann (Binder, Denninger & Urban-Woldron 2010: 210). Auch hier scheint die Skizze auf Grund der vielen Ortspfeile etwas unübersichtlich. Außerdem ist folgender Merksatz essentiell (Binder, Denninger & Urban-Woldron 2010: 210):

Die Beschreibung von Geraden mittels Gleichungen in **Parameterform** ist **nicht eindeutig**. Die verschiedenen Gleichungen einer Geraden können sich in der Wahl des bekannten Punktes der Geraden sowie in der Länge und der Orientierung des gewählten Richtungsvektors voneinander unterscheiden.

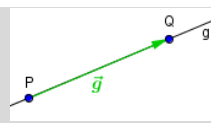
Dieser Merksatz ergänzt und rechtfertigt auch den Hinweis von Brand et al. (2009: 186), möglichst kleine Koordinaten für den Richtungsvektor zu wählen. Zwei weitere Musterbeispiele zeigen, wie dieses theoretische Wissen in Aufgaben praktisch angewendet werden kann. Dabei geht das zweite Beispiel bereits auf das Aufstellen von Trägergeraden der Seiten, Höhen- und Schwerlinien eines Dreiecks ein. Diese Aufgabe erfordert also ein vernetztes Verständnis und Wissen über die Geometrie und allem, was in der Vektorrechnung bisher behandelt worden ist. Die Übungsaufgaben (Binder, Denninger & Urban-Woldron 2010: 220-221) ähneln den Musterbeispielen und erfordern beispielsweise das Aufstellen einer Geraden in Parameterform, das Überprüfen, ob ein Punkt auf einer Geraden liegt und die Bestimmung weiterer Punkte einer Geraden. Außerdem gibt es Aufgaben der Form „Bestimme

jeweils die fehlende Koordinate des Punktes P so, dass P auf der Geraden g liegt“ (Binder, Denninger & Urban-Woldron 2010: 220).

Im Schulbuch *Klar² Mathematik 6* von Langensteiner et al. (2011: 19) wird wie schon bei Brand et al. (2010) ebenfalls das Wissen über die Vektorrechnung in der Ebene auf den Raum übertragen. Erneut wird darauf hingewiesen, dass auch hier die Parameterdarstellung einer Geraden nicht eindeutig ist (Langensteiner et al. 2011: 20).

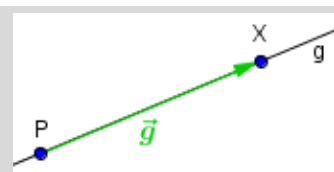
Das Schulbuch *Mathematik Verstehen 5* (Malle et al. 2010a) verzichtet wiederum auf die Darstellung der Parameterform mittels Ortsvektoren. Zu Beginn definieren Malle et al. (2010a: 246) Richtungsvektoren folgendermaßen:

Definition: Sind P und Q zwei verschiedene Punkte einer Geraden g , dann nennt man den Vektor $\vec{g} = \overrightarrow{PQ}$ einen **Richtungsvektor von g** .



Der eigentlichen Definition der Parameterdarstellung einer Geraden geht der folgende bedeutsame Satz voraus (Malle et al. 2010a: 247):

Satz: Ist g eine Gerade der Ebene, P ein Punkt auf g und $\vec{g}$ ein Richtungsvektor von g , dann gilt: $X \in g \Leftrightarrow X = P + t \cdot \vec{g}$ für ein $t \in \mathbb{R}$



Mit diesem Satz können die essentiellen, grundlegenden Aufgaben zur Parameterform der Geradengleichung gelöst werden. Die darauffolgende Definition lautet wie folgt (Malle et al. 2010a: 247):

Definition: Die Vektorgleichung $X = P + t \cdot \vec{g}$ nennt man eine **Parameterdarstellung der Geraden g** mit dem Parameter t [Betonung: Parámeter].

Jedem Parameterwert $t \in \mathbb{R}$ entspricht genau ein Punkt auf der Geraden g .

Umgekehrt entspricht jedem Punkt auf der Geraden g genau ein Parameterwert $t \in \mathbb{R}$. [...]

Gerade in $\mathbb{R}^2$: $g = \{X \in \mathbb{R}^2 \mid X = P + t \cdot \vec{g} \wedge t \in \mathbb{R}\}$

Im Vergleich zu den beiden vorhergehenden Schulbüchern, wird hier der Äquivalenzrelation des obigen Satzes eine größere Bedeutung zugemessen, diese wird sogar nachgewiesen. Die zugehörigen Übungsbeispiele unterscheiden sich nicht sonderlich von denen, die in dieser Arbeit bisher diskutiert worden sind. Folgende Unterpunkte mit jeweils Aufgabe und zugehöriger Musterlösung werden in Malle et al. (2010a: 248-251) behandelt: „Beschreibung von Strecken“, „Liegen vorgegebene Punkte auf einer vorgegebenen Geraden?“, „Ermittlung unbekannter Koordinaten“, „Deutung des Parameters als Zeit“, „Geraden in besonderen Lagen“ und „Verschiedene Parameterdarstellungen derselben Geraden“. „Geraden in besonderen

Lagen“ werden in keinem der vorhergehenden Schulbücher explizit behandelt, auf „Verschiedene Parameterdarstellungen derselben Geraden“ ist aber bis jetzt jedes Schulbuch eingegangen. Dabei weisen Malle et al. (2010a: 250) explizit auf die Änderung des Parameterwerts in Abhängigkeit von verschiedenen Parameterdarstellungen einer bestimmten Geraden hin. Außerdem verwenden Malle et al. (2010a: 250) dezidiert die Bezeichnung „geeignetes Vielfaches des Richtungsvektors $\vec{g}$ “ und betonen, dass man das „mit dem festen Punkt P [...] im Allgemeinen nicht machen [darf]“.

Die obigen Definitionen werden analog im Schulbuch für die sechste Klasse für Geraden im Raum eingeführt (Malle et al. 2010b: 176). Ebenso wird darauf hingewiesen, dass für den Raum analoge Überlegungen wie bereits in der Ebene zu treffen sind. Nur drei kurze Übungsaufgaben (Malle et al. 2010b: 177) dienen zur Übung der Parameterform einer Geraden im Raum.

Bleier et al. (2014: 311) führen vor der Parameterform einer Geraden in der Ebene vorerst die Darstellung einer Strecke in Parameterform ein. Dies erklären sie anhand eines Beispiels, bei dem mit einem Lineal zwei gegebene Punkte P und Q geradlinig verbunden werden und gefragt wird, wo sich zwischen den beiden Punkten die Bleistiftspitze befindet, wenn gewisse Teile der Strecke bereits zurückgelegt worden sind, beispielsweise ein Drittel. Es ergibt sich schließlich die allgemeine Gleichung $X = P + t \cdot \overrightarrow{PQ}$ mit $t \in [0,1]$, wodurch „die Strecke als unendliche Punktmenge beschrieben [wird]“ (Bleier et al. 2014: 311). Der Parameter t durchläuft also alle Werte zwischen 0 und 1 und so entsteht eine Strecke. Erweitert man diesen Gedanken nun insofern, dass $t \in \mathbb{R}$ ist, so entsteht laut Bleier et al. (2014: 312) eine Gerade. Dies definieren Bleier et al. (2014: 312) folgendermaßen:

Definition

Durchläuft t in $g: X = P + t \cdot \vec{r}$ alle Zahlen aus $\mathbb{R}$, so kann jeder Punkt der Geraden g beschrieben werden.

Die Vektorgleichung $g: X = P + t \cdot \vec{r}$ heißt **Parameterform einer Geraden g** :

- P ist ein **Punkt** auf der Geraden
- $\vec{r}$ ist ein **Richtungsvektor** der Geraden
- die Variable t (mit $t \in \mathbb{R}$) wird **Parameter** genannt.

In dieser Definition wird zum ersten Mal das Prinzip ersichtlich, dass der Parameter t alle reellen Zahlen **durchläuft** und dadurch jeder Punkt der Geraden g beschrieben werden kann. Ansonsten unterscheidet sich die hier vorgestellte Definition nicht wesentlich von den anderen.

Auch in diesem Schulbuch wird darauf hingewiesen, dass die Parameterform einer Geraden nicht eindeutig ist und im Zusammenhang damit Richtungsvektoren vereinfacht werden dürfen (Bleier et al. 2014: 313). An dieser Stelle ist in Bleier et al. (2014) bereits die Normalvektorform behandelt worden. Daher beschäftigen sich viele der dieser Definition nachfolgenden Aufgaben mit dem Wechsel zwischen den verschiedenen Darstellungsformen einer Geraden. Interessanterweise gibt es bei Bleier et al. (2014: 313) auch eine Aufgabe, die das Aufstellen der Parameterform besonderer Geraden, wie jene, die die Koordinatenachsen und die Mediane beschreiben, erfordert. Weitere Übungsbeispiele behandeln das Bestimmen von Geraden in Parameterform, wenn ein Punkt und ein Richtungsvektor oder zwei Punkten gegeben sind. Außerdem lernen SchülerInnen durch einige Aufgaben den Zusammenhang zwischen Punkten einer Geraden und dem zugehörigen Parameter (bei bestimmten Richtungsvektoren) kennen.

Auch im Schulbuch *Dimensionen Mathematik 6* von Bleier et al. (2015:249) wird betont, dass für die Parameterform einer Geraden im Raum ähnliche Überlegungen und damit ähnliche Definitionen, mit einer zusätzlichen Komponente, gelten müssen. Es ist auffallend, dass Bleier et al. (2015: 250-252) sehr viele Übungsaufgaben in ihrem Schulbuch anbieten.

Im Schulbuch *Lösungswege Mathematik Oberstufe 5* (Freiler et al. 2015: 245) werden vor der Einführung der Parameterform von Geraden in der Ebene die bereits bekannten Darstellungsformen wiederholt und im Laufe dieses Kapitels auch immer wieder zu diesen Zusammenhänge hergestellt. Die tatsächliche Einführung der neuen Darstellungsmöglichkeit mittels der Parameterform wird mit Hilfe einer Skizze durchgeführt, die in Abbildung 20 dargestellt wird (Freiler et al. 2015: 246):

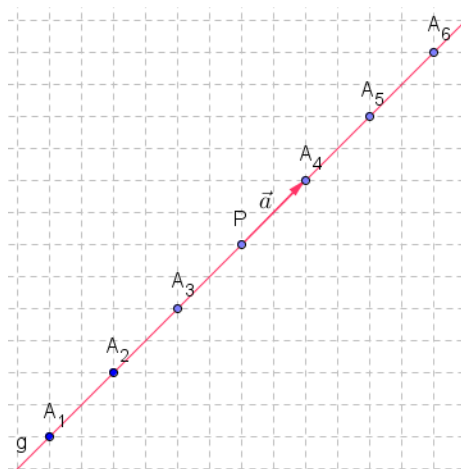


Abbildung 20: Parameterdarstellung einer Geraden – die Einführung in Freiler et al. (2015: 246)

Freiler et al. (2015: 246) erklären, dass man von P ausgehend zu all den anderen hier eingezeichneten Punkten kommt, indem man ein Vielfaches des Vektors $\vec{a}$ zu P addiert. Dann

argumentieren sie, dass man „diese Berechnung für alle beliebigen Punkte X auf g durchführen könnte“ (Freiler et al. 2015: 246) und man daher den Parameter t wählt, der für jede beliebige Zahl aus den reellen Zahlen steht. Folgende Definition ergibt sich also (Freiler et al. 2015: 246):

Parameterdarstellung einer Geraden g

Sei g eine Gerade, P ein Punkt dieser Geraden und $\vec{a}$ ein Richtungsvektor von g . Dann gilt für alle Punkte $X \in g$: $X = P + t \cdot \vec{a}, t \in \mathbb{R}$

Die Übungsaufgaben (Freiler et al. 2015: 2446-247) erfordern wie bei den anderen Schulbüchern vor allem das Aufstellen einer Geraden bei gegebenen Punkten beziehungsweise bei gegebenem Punkt und Richtungsvektor. Außerdem wird die Uneindeutigkeit der Parameterform einer Geraden insofern hervorgehoben, da das Suchen eines Richtungsvektors mit möglichst kleinen ganzzahligen Komponenten oder das Finden verschiedener Parameterdarstellung einer Gerade im Aufgabenpool dieses Buchs zu finden ist. Wie auch bei Malle et al. (2010a: 247) wird auch explizit das Bestimmen einer Geraden in Parameterform anhand einer Zeichnung geübt (Freiler et al. (2015: 247). Wie auch Binder, Denninger & Urban-Woldron (2010: 210) und Malle et al. (2010a: 262-263), inkludieren Freiler et al. (2015: 248) eine Aufgabe, die das Bestimmen der Trägergeraden der Seiten, der Schwerlinien, der Höhenlinien und der Streckensymmetralen eines Dreiecks erfordert. Des Weiteren wird geübt zu überprüfen, ob ein Punkt auf einer Geraden liegt und zwar rechnerisch sowie auch mit Hilfe von Technologie. Eine weitere Aufgabe ähnlich zu Malle et al. (2010a: 253) verlangt von SchülerInnen zu einer gegebenen Geraden eine weitere Gerade durch einen gegebenen Punkt aufzustellen, die zu der gegebenen Geraden parallel ist beziehungsweise auf diese normal steht (Freiler et al. 2015: 250). Aufgabe 1003 (Freiler et al. 2015: 250) entspricht dem Aufgabenformat x aus 5 der schriftlichen Reifeprüfung in Mathematik und ähnelt stark einem Beispiel, das im Aufgabenpool vom BIFIE (2014: 69) zu finden und in Abbildung 21 dargestellt ist, nur im $\mathbb{R}^3$:

Geraden im $\mathbb{R}^{3*}$												
Aufgabennummer: 1_137	Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐											
Aufgabenformat: Multiple Choice (2 aus 5)	Grundkompetenz: AG 3.4											
☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☒ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich										
<p>Gegeben ist die Gerade g mit der Gleichung $X = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ mit $t \in \mathbb{R}$.</p> <p>Aufgabenstellung:</p> <p>Zwei der folgenden Gleichungen sind ebenfalls Parameterdarstellungen der Geraden g. Kreuzen Sie diese beiden Gleichungen an!</p> <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto; border-collapse: collapse;"> <tbody> <tr> <td style="padding: 10px;">$X = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ mit $t \in \mathbb{R}$</td> <td style="width: 50px; text-align: center; vertical-align: middle;">☐</td> </tr> <tr> <td style="padding: 10px;">$X = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ mit $t \in \mathbb{R}$</td> <td style="text-align: center; vertical-align: middle;">☐</td> </tr> <tr> <td style="padding: 10px;">$X = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ mit $t \in \mathbb{R}$</td> <td style="text-align: center; vertical-align: middle;">☐</td> </tr> <tr> <td style="padding: 10px;">$X = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ mit $t \in \mathbb{R}$</td> <td style="text-align: center; vertical-align: middle;">☐</td> </tr> <tr> <td style="padding: 10px;">$X = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit $t \in \mathbb{R}$</td> <td style="text-align: center; vertical-align: middle;">☐</td> </tr> </tbody> </table>			$X = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ mit $t \in \mathbb{R}$	☐	$X = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ mit $t \in \mathbb{R}$	☐	$X = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ mit $t \in \mathbb{R}$	☐	$X = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ mit $t \in \mathbb{R}$	☐	$X = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit $t \in \mathbb{R}$	☐
$X = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ mit $t \in \mathbb{R}$	☐											
$X = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ mit $t \in \mathbb{R}$	☐											
$X = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ mit $t \in \mathbb{R}$	☐											
$X = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ mit $t \in \mathbb{R}$	☐											
$X = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit $t \in \mathbb{R}$	☐											

Abbildung 21: BIFIE Aufgabe zu Geraden im $\mathbb{R}^3$ (BIFIE 2014: 69)

Die weiteren Aufgaben konzentrieren sich schließlich auf den Wechsel zwischen den verschiedenen Darstellungsformen von Geraden, insbesondere im Hinblick auf die Relation zwischen der Steigung k in der expliziten Darstellungsform $y = k \cdot x + d$ und dem dazugehörigen Richtungsvektor $\begin{pmatrix} 1 \\ k \end{pmatrix}$.

Eine Aufgabenart, die in jedem Schulbuch, sowohl für die fünfte, als auch für die sechste Klasse, zu finden ist, wurde auch beim Haupttermin für die schriftliche Reifeprüfung 2014/15 in Mathematik verwendet (BIFIE 2015a: 8) und ist in Abbildung 22 abgebildet:

Aufgabe 4

Parameterdarstellung einer Geraden

Die zwei Punkte $A = (-1|-6|2)$ und $B = (5|-3|-3)$ liegen auf einer Geraden g in $\mathbb{R}^3$.

Aufgabenstellung:

Geben Sie eine Parameterdarstellung dieser Geraden g unter Verwendung der konkreten Koordinaten der Punkte A und B an!

$g: X =$ _____

Abbildung 22: Aufgabe der standardisierten Reifeprüfung vom 11. Mai 2015 (BIFIE 2015a: 8)

Abschließend ist zu sagen, dass in fast allen hier vorgestellten Schulbüchern die Parameterdarstellung vor der Normalvektordarstellung behandelt wird, außer in Bleier et al. (2014). Ein Grund dafür, dass Bleier et al. (2014: 206) die Normalvektorform vor der Parameterform einführen, könnte sein, dass im Kapitel direkt davor Normalvektoren eingeführt werden und daher dieses Wissen gleich angewendet werden kann. Die meisten Übungsbeispiele aus dem BIFIE Aufgabenpool (2014) basieren allerdings auf der Geradengleichung in Parameterform und auch die Aufgabe zu dieser Grundkompetenz der standardisierten Reifeprüfung zum Haupttermin am 11.5.2015 (BIFIE 2015: 8) erfordert das Aufstellen einer Geraden in Parameterform und nicht in Normalvektorform. Bleier et al. (2014: 306) beschreibt beispielsweise folgendes: „Zu jeder Geraden lassen sich Vektoren angeben, die dieselbe Richtung haben wie die Gerade (*Richtungsvektor*) oder auf die Gerade normal stehen (*Normalvektor*).“ Vektoren, die in dieselbe Richtung zeigen wie die Gerade, scheinen intuitiv leichter nachvollziehbar zu sein, als jene die normal auf eine Gerade stehen. Die Normalvektorform ist außerdem nur in der Ebene möglich und kann im Raum nicht angegeben werden, da es für jeden Vektor unendlich viele Normalvektoren gibt, die in verschiedene Richtungen zeigen. Der folgende Abschnitt wird sich nichtsdestotrotz mit dieser Darstellungsform genauer auseinandersetzen.

5.4.2 Normalvektordarstellung von Geraden im $\mathbb{R}^2$

Brand et al. (2009: 212) führen die Normalvektorform von Geraden in der Ebene mittels folgender Herleitung ein:

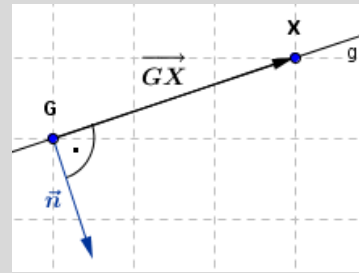
Betrachte die Gerade g in der Abbildung. Für jeden Punkt X der Geraden g gilt:

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{GX} = 0$$

$$\vec{n} \cdot (X - G) = 0$$

$$\vec{n} \cdot X - \vec{n} \cdot G = 0$$

$$\vec{n} \cdot X = \vec{n} \cdot G$$



Mithilfe eines Normalenvektors $\vec{n}$ und eines Punktes G der Geraden können wir so ebenfalls jeden Punkt X von g beschreiben.

Diese Herleitung beruht auf dem Verständnis des Orthogonalitätskriteriums und den Rechengesetzen von Vektoren, wobei diese in Brand et al. (2009) nicht explizit behandelt worden sind. Obwohl hier nur einfache Rechengesetze zum Tragen kommen, sollte dies mit den SchülerInnen spätestens bei dieser Herleitung besprochen werden. Ansonsten unterstützt die Skizze die Herleitung und damit das Verständnis der Normalenvektorform einer Geraden. Ein Musterbeispiel zeigt, wie diese Form bei zwei gegebenen Punkten einer Geraden berechnet werden kann und wie eine Normalenvektorform einer Geraden explizit aussehen kann. Dieses Schulbuch wählt hier den Ansatz, dass auf der linken Seite der Geradengleichung das Skalarprodukt nicht ausmultipliziert wird, auf der rechten Seite aber schon. Brand et al. (2009: 212) weisen darauf hin: „Durch Ausmultiplizieren [der linken Seite] erhalten wir dann die Geradengleichung in der allgemeinen Form $ax + by = c$. Die Koeffizienten von x und y sind genau die Komponenten eines Normalenvektors der Geraden.“ Da dies die letzte Form der Geradengleichung ist, die behandelt wird, wird nun zu einer kurzen Zusammenfassung übergeleitet, wie diese Formen aussehen können und wie man zwischen diesen Formen wechseln kann. Das darauffolgende Musterbeispiel behandelt jedoch nicht die Normalenvektorform der Geradengleichung, sondern die Umwandlung von der Form $y = k \cdot x + d$ in die Parameterform (Brand et al. 2009: 212). Die dritte Musteraufgabe liefert die Anwendung der Normalenvektorform bei dem Aufstellen einer Seitensymmetrale, wobei diese schlussendlich nicht in der Normalenvektorform angegeben wird, sondern in der allgemeinen Form $a \cdot x + b \cdot y = c$. Von den folgenden sieben Übungsbeispielen, die das Bestimmen von Geradengleichungen erfordern, verlangt nur die erste die Normalenvektorform, während bei den übrigen Aufgaben das Aufstellen der Geradengleichung in allgemeiner Form und in Parameterform geübt wird, wobei ersteres die Normalenvektorform voraussetzen kann, aber nicht muss, da SchülerInnen auch über die Parameterform zur allgemeinen Form kommen könnten, auch wenn dies umständlicher wäre (Brand et al. 2009: 213). Die Zusammenhänge zwischen den vier Formen einer Geradengleichung werden ebenfalls in einer Aufgabe (Brand et al.

2009: 213) behandelt. Dabei sollen auch die Vor- und Nachteile verschiedener Formen dokumentiert werden.

Binder, Denninger & Urban-Woldron (2010: 212) motivieren in ihrem Schulbuch *Klar² Mathematik 5* die Normalvektorform der Geradengleichung damit, die Parameterdarstellung in eine parameterfreie Form zu bringen, nämlich in die bereits bekannte und vorher behandelte allgemeine Form $a \cdot x + b \cdot y = c$. Dies geschieht anhand eines expliziten Beispiels, in dem die Frage bearbeitet wird, welche Eigenschaft „der durch die Koeffizienten a und b gebildete Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ [besitzt]“ (Binder, Denninger & Urban-Woldron 2010: 212). Für X beziehungsweise $\vec{x}$ auf der linken Seite der Geradengleichung in Parameterform wird $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ eingesetzt. Durch den Koordinatenvergleich erhält man ein Gleichungssystem, aus welchem mittels Additionsverfahren der Parameter t eliminiert wird und die allgemeine Form der Geradengleichung übrig bleibt. Es zeigt sich, dass der mit Hilfe der Koeffizienten a und b gebildete Vektor $\vec{v}$ normal auf den Richtungsvektor der Geraden steht. Dieses einführende Beispiel führt nun zu der theoretischen Herleitung der Normalvektorform einer Geradengleichung, wobei einerseits der in Brand et al. (2009: 212) verwendete Ansatz inkludiert wird und andererseits folgende Herleitung behandelt wird, die von einer gegebenen Parameterform ausgeht, wobei die Ortsvektorschreibweise gewählt wird (Binder, Denninger & Urban-Woldron 2010: 213):

$$\vec{x} = \vec{p} + t \cdot \vec{a} \quad | \cdot \vec{n}$$

$$\vec{x} \cdot \vec{n} = \vec{p} \cdot \vec{n} + t \cdot \vec{a} \cdot \vec{n} \quad \text{da } \vec{a} \perp \vec{n} \text{ ist, muss } \vec{a} \cdot \vec{n} = 0 \text{ sein} \Rightarrow t \cdot \vec{a} \cdot \vec{n} = 0$$

$$\vec{x} \cdot \vec{n} = \vec{p} \cdot \vec{n}$$

Schreibt man die Normalvektorform in Koordinatenschreibweise und bildet das skalare Produkt, so erhält man:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \end{pmatrix} \Rightarrow n_x \cdot x + n_y \cdot y = n_x \cdot p_x + n_y \cdot p_y$$

Durch einen Koeffizientenvergleich mit der allgemeinen Form der Geradengleichung wird klar, dass $\begin{pmatrix} n_x \\ n_y \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ gelten muss. Ein einfaches Musterbeispiel zum Aufstellen der Normalvektorform einer Geraden bietet dieses Buch nicht, dafür zeigt eine Aufgabe mit Musterlösung die Berechnung des Umkreismittelpunkts eines Dreiecks mittels der Seitensymmetralen (Binder, Denninger & Urban-Woldron 2010: 213). Wie bei Brand et al. (2009: 213) wird also implizit darauf hingewiesen, dass die Normalvektordarstellung der Geraden insbesondere beim Bestimmen von Seitensymmetralen geeignet ist. In der

Musterlösung ist ersichtlich, dass die Gleichung der Geraden grundsätzlich in ihrer ausmultiplizierten Form angegeben wird, die Normalvektordarstellung dient daher eher nur als Mittel zum Zweck, denn gerechnet wird ebenso mit der allgemeinen Form der Geradengleichung.

Die Übungsaufgaben ähneln jenen in Brand et al. (2009: 213). Beispielsweise soll zu einer gegebenen Gerade eine parallele oder normale Gerade durch einen vorgegebenen Punkt aufgestellt werden (Binder, Denninger & Urban-Woldron 2010: 221). Außerdem sollen der Umkreismittelpunkt und Höhenschnittpunkt bei gegebenen Koordinaten der Eckpunkte der Dreiecke berechnet werden, wobei hier wiederum das Problem entstehen könnte, dass SchülerInnen dabei die Normalvektorform nicht üben, da man sie durch die Verwendung der Parameterdarstellung umgehen könnte.

Binder, Denninger & Urban-Woldron (2010: 214) inkludieren auch eine Abbildung, welche zeigen soll, wie zwischen den verschiedenen Darstellungsformen einer Geraden gewechselt werden kann. Kurze Anweisungen und Pfeile veranschaulichen, was beim jeweiligen Wechsel in andere Darstellungsformen gemacht werden muss. Es gibt dazu auch ein explizites Übungsbeispiel, bei dem eine Gerade in einer der vier Formen gegeben ist und von dieser ausgehend die anderen drei Formen bestimmt werden sollen (Binder, Denninger & Urban-Woldron 2010: 221).

Malle et al. (2010a: 257) führen die Normalvektordarstellung ebenfalls mit der in Brand et al. (2009: 212) vorgestellten Herleitung ein und formulieren daher folgenden Satz:

Ist g eine Gerade in $\mathbb{R}^2$, die den Punkt $P = (p_1|p_2)$ enthält und den Vektor $\vec{n} = (n_1|n_2) \neq (0|0)$ als Normalvektor hat, dann gilt:

$$X \in g \Leftrightarrow \vec{n} \cdot X = \vec{n} \cdot P \quad \text{bzw.}$$

$$(x|y) \in g \Leftrightarrow n_1x + n_2y = c \quad (\text{mit } c = n_1p_1 + n_2p_2)$$

Die Gleichung $\vec{n} \cdot X = \vec{n} \cdot P$ bzw. $n_1x + n_2y = c$ nennt man eine **Normalvektordarstellung der Geraden g** [...].

In diesem Fall werden sowohl die ausmultiplizierte, als auch die nicht ausmultiplizierte Darstellung dieser Gleichung als Normalvektorform der Geraden bezeichnet. In einer zusätzlichen Bemerkung zu diesem Satz wird außerdem hervorgehoben, dass auf beiden Seiten dieser Gleichungen reelle Zahlen stehen (Malle et al. 2010a: 257). Die zweite Herleitung der Normalvektorform, die in Binder, Denninger & Urban-Woldron (2010: 213) vorgestellt wird, wird in Malle et al. (2010a: 260) in einer Aufgabe verlangt. Die in Malle et al. (2010a: 258) präsentierten Musteraufgaben zeigen einerseits das Aufstellen einer Geradengleichung in

Normalvektorform bei gegebenem Normalvektor und Punkt auf der Geraden sowie andererseits den Wechsel zwischen dieser Darstellung und der Parameterdarstellung, wobei für beide Richtungen eine Musteraufgabe gezeigt wird. Im Gegensatz zu den anderen beiden bisher betrachteten Schulbüchern im Hinblick auf die Normalvektorform der Geradengleichung, bieten Malle et al. (2010a: 259) auch eine elementare Aufgabe an, mittels derer SchülerInnen nur das Bestimmen einer Geradengleichung in Normalvektorform bei gegebenem Normalvektor und Punkt üben können. Weitere Übungsaufgaben behandeln den Wechsel zwischen Normalvektordarstellung und Parameterdarstellung einer Geraden. Wieder werden, im Gegensatz zu anderen Schulbüchern, auch Spezialfälle behandelt, wie jene Geraden, die die erste oder zweite Achse darstellen oder zu einer dieser Achsen parallel sind (Malle et al. 2010a: 259). Wie bei Brand et al. (2009: 213) und Binder, Denninger & Urban-Woldron (2010: 221) gibt es ein Beispiel, bei dem verlangt wird, eine Gerade aufzustellen, die auf eine gegebene Gerade normal steht und durch einen vorgegebenen Punkt geht (Malle et al. 2010a: 259). Eine Aufgabe zu der Berechnung von Streckensymmetralen ist ebenfalls inkludiert worden. Des Weiteren erfordern einige Aufgaben zusätzlich die Prüfung, ob Punkte auf einer gegebenen Geraden liegen, was in den anderen bisher betrachteten Schulbüchern nicht behandelt wurde. Obwohl die gegenseitige Lage und das Schneiden von Geraden in Normalvektorform erst im anschließenden Abschnitt behandelt wird, lautet Aufgabe 14.77 (Malle et al. 2010a: 260) folgendermaßen:

14.77) Gegeben seien die Geraden $g: 2x - 5y = 7$ und $h: ax + by = c$. Setze für a , b und c Zahlen so ein, sodass 1) $g = h$, 2) $g \parallel h$, aber $g \neq h$, 3) $g \perp h$!

Obwohl die SchülerInnen die Lagebeziehungen zweier Geraden in Normalvektorform noch nicht behandelt haben, können sie mit Hilfe ihres bisherigen Wissens über die Vektorrechnung, insbesondere über die Normalvektordarstellung, diese Aufgabe lösen.

Bleier et al. (2014: 306-307) führen in ihrem Schulbuch *Dimensionen Mathematik 5* als einziges der hier betrachteten Schulbücher die Normalvektorform der Geraden vor der Parameterdarstellung ein. Dabei greifen sie aber zuerst schon auf die Bedeutung von Richtungsvektoren zurück. Anschließend wird anhand eines expliziten Beispiels die allgemeine Geradengleichung aufgestellt, wobei die einzelnen Rechenschritte nicht begründet werden. Herleitungen wie in den drei bisher betrachteten Schulbüchern gibt es in Bleier et al. (2014) auch keine. Dafür wird diese Darstellungsform umso detaillierter beschrieben (Bleier et al. 2014: 307):

Normalvektordarstellung einer Geraden

Ist eine Gerade g in impliziter Form $g: a \cdot x + b \cdot y = c$ gegeben, dann hat der Normalvektor der Geraden g die Komponenten $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

Ist umgekehrt von einer Geraden der Normalvektor $\vec{n}$ und ein beliebiger Punkt P bekannt, so kann die Gerade g in der Form $\vec{n} \cdot X = c$ mit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ und $c = \vec{n} \cdot P$ angeschrieben werden.

Diese Darstellungsform einer Geraden wird **Normalvektorform** oder **Normalvektordarstellung** genannt. Folgende Schreibweisen sind üblich:

$$\vec{n} \cdot X = \vec{n} \cdot P \text{ oder } \vec{n} \cdot X = c.$$

Für $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ kann jeder beliebige Punkt der Geraden eingesetzt werden.

Wird das **Skalarprodukt** $\vec{n} \cdot X$ in der **Normalvektorform** $\vec{n} \cdot X = c$ ausmultipliziert, ergibt sich die Gerade g in ihrer **impliziten Form** $a \cdot x + b \cdot y = c$.

Diese Beschreibung der Normalvektordarstellung einer Geraden beinhaltet auch eine genaue Erklärung des Zusammenhangs zwischen der impliziten Form einer Geraden und der Normalvektorform, sowohl theoretisch als auch rechnerisch. Zwischen der nicht ausmultiplizierten und der ausmultiplizierten Form wird zwar unterschieden, diese beiden Darstellungen werden aber nur als verschiedene Schreibweisen angesehen, wobei letztere außerdem als implizite Form bezeichnet wird.

Die Übungsaufgaben bei Bleier et al. (2014: 308-310) sind zahlreicher und vielfältiger als bei Brand et al. (2009: 213) und Binder, Denninger & Urban-Woldron (2010: 221). Auffällig ist dabei, dass vor allem mehr Beispiele entsprechend den Formaten für Typ 1 Aufgaben für die schriftliche Reifeprüfung inkludiert sind. Aufgabe 959 (Bleier et al. 2014: 308) verlangt beispielsweise die Zuordnung der passenden Normalvektoren zu den gezeichneten Geraden. In Aufgabe 956 (Bleier et al. 2014: 308) müssen SchülerInnen die beiden Gleichungen ankreuzen, die die Gerade mit gegebenem Normalvektor und Punkt beschreiben:

956) Von einer Geraden g ist der Normalvektor $\vec{n} = (-1|2)$ und ein Punkt $A(2|4)$ bekannt. Welche der folgenden Gleichungen beschreibt die Gerade g ? Kreuze die beiden Zutreffenden an!

☐ $2x + y = 6$ ☐ $-x + 2y = 6$ ☐ $2x - y = 6$ ☐ $-2x - 2y = 6$ ☐ $x - 2y = -6$

Des Weiteren gibt es grundlegende Aufgaben, wie in Malle et al. (2010a: 260), wobei ebenfalls der Wechsel zwischen den verschiedenen Darstellungsformen einer Geraden eine Rolle spielt (Bleier et al. 2014: 309). Interessanterweise werden hier nicht, wie schon in den vorhergehenden Schulbüchern, das Aufstellen von Seitensymmetralen geübt, wobei die

Normalvektorform besonders passend anzuwenden wäre, sondern die Bestimmung der Trägergeraden und Schwerelinien eines Dreiecks in Normalvektorform. Auch das bereits in allen vorhergehenden Büchern inkludierte typische Beispiel, das das Aufstellen einer Gerade erfordert, die zu einer gegebenen Gerade parallel oder normal ist, ist in Bleier et al. (2014: 310) zu finden. Wichtig ist außerdem Aufgabe 979 (Bleier et al. 2014: 313), da sie die Zusammenstellung einer Mindmap erfordert, die die Zusammenhänge zwischen den verschiedenen Formen einer Geradengleichung darstellen soll, wobei die Normalvektorform und die allgemeine Form als zusammengehörig interpretiert werden sollen.

In Freiler et al. (2015: 255) wird die Normalvektordarstellung als Alternative zu der Parameterdarstellung einer Geraden eingeführt. Dabei wird insbesondere auf eine Zeichnung verwiesen, die in Abbildung 23 nachgestellt wird:

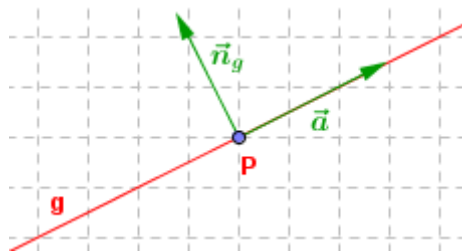


Abbildung 23: Die Normalvektordarstellung – die Einführung in Freiler et al. (2015: 255)

Freiler et al. (2015: 255) merken dazu an, dass diese Gerade sowohl durch die bereits bekannte Parameterform der Geradengleichung beschrieben werden kann, als auch durch die hier neu eingeführte Normalvektorform. Wie auch in Binder, Denninger & Urban-Woldron (2010: 213) erfolgt die Herleitung der Normalvektorform in verkürzter Form durch die Multiplikation der Geradengleichung in Parameterform mit dem Normalvektor der Geraden g . So folgern auch Freiler et al. (2015: 255) folgende, den anderen ähnliche, aber weniger ausführliche Definition:

Normalvektordarstellung einer Geraden

Sei $\vec{n}$ ein Normalvektor und P ein beliebiger Punkt der Geraden g , dann gilt für alle Punkte $X \in g$:

$$g: \vec{n} \cdot X = \vec{n} \cdot P \text{ (Normalvektordarstellung einer Geraden)}$$

Am darauffolgenden Musterbeispiel ist erkennbar, dass Freiler et al. (2015: 255) unter der Normalvektorform einer Geraden die nicht ausmultiplizierte Form verstehen, während die ausmultiplizierte Form die allgemeine Form der Geradengleichung heißt. Nach diesem Beispiel, das zeigt, wie eine Gerade in Normalvektorform durch zwei gegebene Punkte aufzustellen ist, folgen einige Übungsaufgaben, in denen auf die Normalvektorform und die allgemeine Form eingegangen wird. Hier werden, im Gegensatz zu den anderen Schulbüchern,

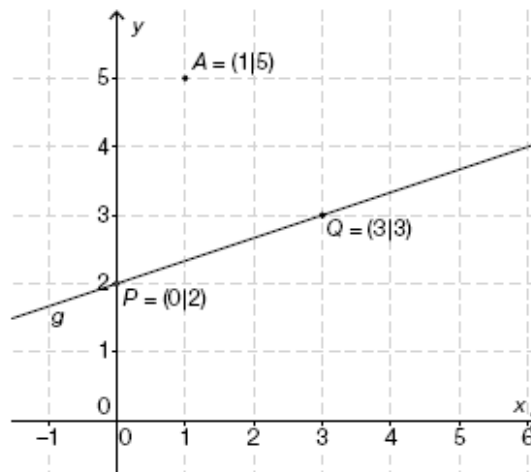
Geraden nicht ausschließlich in der allgemeinen Form oder der Parameterform angegeben, sondern eben auch in der nicht ausmultiplizierten Normalvektorform. Wie in allen anderen hier vorgestellten Schulbüchern ist auch in Freiler et al. (2015: 256) jenes Beispiel inkludiert, welches die Bestimmung einer Geraden verlangt, die zu einer gegebenen Gerade parallel oder normal ist und durch einen vorgegebenen Punkt geht. Im Gegensatz zu den anderen Schulbüchern ist hier allerdings erneut die nicht ausmultiplizierte Normalvektorform gegeben. Interessant ist auch Beispiel 1025 (Freiler et al. 2015: 256), bei dem SchülerInnen von der allgemeinen Form einer Geraden g einen Richtungsvektor und einen Normalvektor ablesen sollen. Diese Aufgabe dient also als vorbereitende Übung zur Bestimmung der Parameterform und der Normalvektorform einer Geraden. Da für beide Formen jeweils die Bestimmung eines Punktes auf dieser Geraden notwendig ist, verlangt dies die nächste Aufgabe 1026 (Freiler et al. 2015: 256). Der übrige Teil dieses Abschnitts im Schulbuch von Freiler et al. (2015: 256-257) beschäftigt sich mit den Zusammenhängen der verschiedenen Formen einer Geradengleichung und zeigt mittels einer Abbildung, wie man zwischen den Darstellungsformen wechseln kann.

Aufgaben, die explizit die Bestimmung der Normalvektorform einer Geraden verlangen, gibt es im Gegensatz zur Parameterdarstellung im Aufgabenpool des BIFIE (2014) nicht. Interessant ist aber, dass fast alle dieser Schulbücher Aufgaben beinhalten, die das Aufstellen einer Geraden erfordern, die auf eine gegebene Gerade normal steht, wie es beispielsweise auch beim zweiten Nebentermin für die standardisierte Reifeprüfung für das Schuljahr 2014/15 verlangt wurde, wie Abbildung 24 zeigt (BIFIE 2016a: 9):

Aufgabe 5

Gleichung einer Geraden

In der nachstehenden Abbildung sind eine Gerade g durch die Punkte P und Q sowie der Punkt A dargestellt.



Aufgabenstellung:

Ermitteln Sie eine Gleichung der Geraden h , die durch A verläuft und normal zu g ist!

Abbildung 24: Aufgabe der standardisierten Reifeprüfung vom 15. Jänner 2016 (BIFIE 2016a: 9)

Auffallend dabei ist, dass SchülerInnen diese Aufgabe mittels geeigneter Technologie auch dann lösen können, wenn sie das Prinzip, das dieser Aufgabe zugrunde liegt, nicht verstehen.

5.4.3 Lagebeziehungen bestimmen und Schnittpunkte ermitteln

Brand et al. (2009: 214) beginnen den Abschnitt zu der Bestimmung der Lagebeziehung zweier Geraden zueinander im Schulbuch *Thema Mathematik 5* mit einer kurzen Aufzählung der drei Möglichkeiten dieser Lagebeziehungen im $\mathbb{R}^2$, wobei jeweils zusätzlich angegeben wird, ob zwei Geraden in dieser Lage keinen, einen oder unendlich viele Schnittpunkte haben. Außerdem wird darauf hingewiesen, dass zwei Geraden „genau dann einen Schnittpunkt [haben], wenn ihre Richtungsvektoren nicht parallel sind“ (Brand et al. 2009: 214). Im Anschluss werden zwei Musterbeispiele vorgestellt, die die Berechnung des Schnittpunkts zweier Geraden zeigt, einmal ausgehend von der Parameterdarstellung und einmal unter Verwendung der Normalvektorform der Geradengleichungen. Auffällig dabei ist, dass in beiden Aufgaben davon ausgegangen wird, dass die Lage, nämlich schneidend, bereits bekannt ist. Es wird also in den Musterbeispielen nur auf die Berechnung der Schnittpunkte eingegangen, die Lagebestimmung selbst wird hier nicht durchgeführt. Abschließend wird noch kurz die

Berechnung des Schnittwinkels zweier Geraden erklärt (Brand et al. 2009: 214). Die Übungsbeispiele (Brand et al. 2009: 215) erfordern ebenfalls, wie die Musteraufgaben, zum Großteil das Berechnen des Schnittpunkts ohne eine vorherige Untersuchung der Lagebeziehung. Nur Aufgabe 1234 verlangt ausdrücklich die Bestimmung der Lagebeziehung und Beispiel 1237 die Überprüfung gegebener Geraden auf Parallelität (Brand et al. 2009: 215). Bei letzterer Aufgabe muss vor allem zwischen parallel und ident unterschieden werden. Wie das gemacht wird, wird zwar nicht erklärt, aber durch die anfängliche Erklärung mit dem Hinweis darauf, dass parallele Geraden keine gemeinsame Punkte beziehungsweise idente Geraden unendlich viele gemeinsame Punkte haben, könnten SchülerInnen dies vielleicht selbst lösen. Interessant ist auch Aufgabe 1240 (Brand et al. 2009: 215), da hier zwei Geraden gegeben sind, wobei eine in der Parameterform und die andere in der Normalvektorform einer Geradengleichung gegeben ist. Es soll „blitzartig“ (Brand et al. 2009: 215) entschieden werden, ob die angegebenen Geraden parallel sind oder normal aufeinander stehen. Dadurch wird noch einmal der Zusammenhang zwischen den beiden Formen der Geradengleichung verdeutlicht und trainiert.

Hinsichtlich der Lagebeziehungen zwischen Geraden im $\mathbb{R}^3$ beleuchten Brand et al. (2010: 104) im zugehörigen Schulbuch für die sechste Klasse dieselben Fälle, wie im $\mathbb{R}^2$, sowie den zusätzlichen Fall der windschiefen Geraden. Abgesehen von der Beschreibung für die windschiefen Geraden g und h : „ $g \cap h = \emptyset, g \nparallel h$ “ (Brand et al. 2010: 104) gibt es aber keine weiteren Informationen oder Musterbeispiele dazu. Das Musterbeispiel zeigt die Berechnung des Schnittpunkts zweier schneidender Geraden. Die Übungsaufgaben (Brand et al. 2010: 105) beschäftigen sich mit der Untersuchung der Lage zweier Geraden und gegebenenfalls der Berechnung des Schnittpunkts sowie des Schnittwinkels. Besonders interessant ist aber Aufgabe 545 (Brand et al. 2010: 105):

545) Finde für die Variablen a , b und c Werte, sodass die Geraden

$$g: X(s) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } h: X(s) = \begin{pmatrix} b \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} c \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

- a) einander schneiden,
- b) parallel sind,
- c) identisch sind,
- d) windschief sind.

Hinweis: Überleg dir, ob es nur eine Lösung oder beliebig viele Lösungen geben kann.

Um diese Aufgabe zu lösen, müssen SchülerInnen genau begriffen haben, welche Eigenschaften jede Lagebeziehung kennzeichnen und welche Eigenschaften diese Lagebeziehungen unterscheiden.

Im Gegensatz zu Brand et al. (2009) behandelt das Schulbuch *Klar² Mathematik 5* von Binder, Denninger & Urban-Woldron (2010: 211) die Untersuchung der Lagebeziehung zweier Geraden in der Ebene bereits nach der Einführung der Parameterform einer Geradengleichung und damit vor der Normalvektorform. Dementsprechend werden in der theoretischen Erklärung sowie in den beiden Musteraufgaben nur Geraden, die in der Parameterform gegeben sind, behandelt. Die Auflistung der drei Möglichkeiten für die gegenseitige Lage zweier Geraden im $\mathbb{R}^2$ wird bei Binder, Denninger & Urban-Woldron (2010: 211) um einiges detaillierter beschrieben:

Sind die beiden Geraden g und h durch $g: \vec{x} = \vec{p} + t \cdot \vec{a}$ und $h: \vec{x} = \vec{q} + s \cdot \vec{b}$ gegeben, so gilt:

g und h sind **parallel**, wenn ihre **Richtungsvektoren parallel** sind und kein Punkt von g auf h liegt bzw. umgekehrt kein Punkt von h auf g liegt.

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \text{ und } P \notin h \text{ bzw. } Q \notin g \Rightarrow g \parallel h \Rightarrow g \cap h = \{\}$$

g und h sind **ident**, wenn ihre **Richtungsvektoren parallel** sind und alle Punkte (daher auch P) von g auf h liegen bzw. umgekehrt alle Punkte (daher auch Q) von h auf g liegen.

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \text{ und } P \in h \text{ bzw. } Q \in g \Rightarrow g \parallel h \Rightarrow g \cap h = g = h$$

g und h sind **schneidend**, wenn ihre **Richtungsvektoren nicht parallel** sind. Es gibt genau einen (symbolisch: $\exists!$) gemeinsamen Punkt, den Schnittpunkt S .

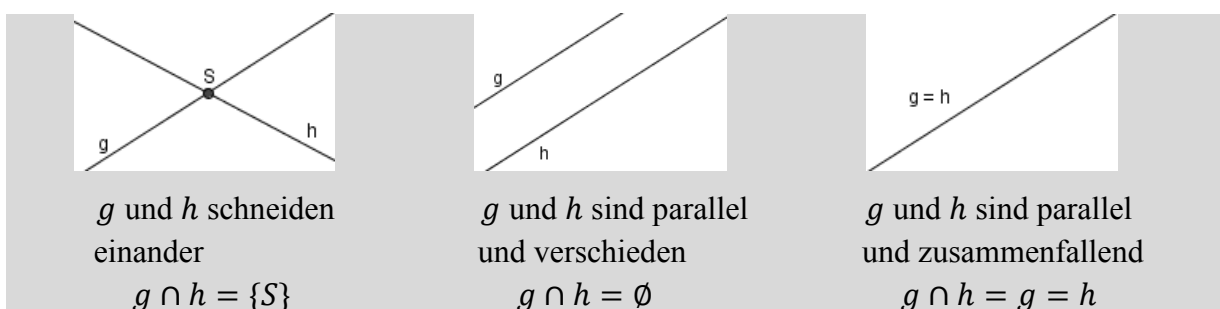
$$\vec{a} \nparallel \vec{b} \Rightarrow g \times h \Rightarrow g \cap h = \{S\}$$

Im Zuge dieser theoretischen Erklärung der drei verschiedenen Lagebeziehungen wird durch die detaillierte Beschreibung der jeweiligen Lagebeziehung auch die praktische Anwendung erklärt. Folgt man insbesondere der Zeile, die den jeweiligen Sachverhalt mittels mathematischer Symbole darstellt, so kann man die Lagebeziehung anhand dieser eindeutig bestimmen. Im Gegensatz zu Brand et al. (2009: 214) wird der Unterschied zwischen parallelen Geraden und identen Geraden stärker betont und dessen rechnerische Bestimmung verdeutlicht. Die Musteraufgaben darunter zeigen jeweils eine vollständige Lagebestimmung, wobei einmal der Fall ident und einmal der Fall schneidend mit Berechnung ebendieses Schnittpunkts gezeigt wird (Binder, Denninger & Urban-Woldron 2010: 211-212). Der durch die obige Erklärung propagierte Rechenweg über die Prüfung der Richtungsvektoren auf Parallelität und die anschließende Unterscheidung zwischen parallel und ident oder Schnittpunktberechnung wird

in einem Merksatz noch einmal betont (Binder, Denninger & Urban-Woldron 2010: 212). Es gibt nur wenige Übungsaufgaben zu der Bestimmung der Lagebeziehung zweier Geraden und gegebenenfalls zur Schnittpunktberechnung, wobei die Geradengleichungen erneut nur in Parameterform anzutreffen sind, es sei denn, es sind nur die Eckpunkte eines Dreiecks gegeben (Binder, Denninger & Urban-Woldron 2010: 221). Die Ausnahme bildet eine Aufgabe (Binder, Denninger & Urban-Woldron 2010: 221), da hier zumindest eine der beiden Geraden in der allgemeinen oder der expliziten Form angegeben ist.

Im zugehörigen Schulbuch für die sechste Klasse *Klar² Mathematik 6* von Langensteiner et al. (2011: 33) wird die Untersuchung der Lage zweier Geraden im $\mathbb{R}^3$ etwas genauer behandelt, als bei Brand et al. (2010: 104). Langensteiner et al. (2011: 33) führen die vier möglichen Lagebeziehungen nicht nur einfach an und beschreiben deren Schnittmengen mittels mathematischer Symbole, sondern erklären diese auch in Worten, unterstützt durch Zeichnungen. Des Weiteren zeigt ein Musterbeispiel die Bestimmung der Lage von zwei schneidenden Geraden sowie von zwei parallelen Geraden (Langensteiner et al. 2011: 33-34). Im Gegensatz zu Brand et al. (2010: 104) zeigen Langensteiner et al. (2011: 34) inwiefern zwischen schneidenden und windschiefen Geraden unterschieden werden kann: „Aus zwei Gleichungen berechnen wir die Parameter s und t . Diese setzen wir dann in die dritte Gleichung ein und überprüfen, ob sich eine **wahre Aussage (=schneidend)** oder eine **falsche Aussage (=windschief)** ergibt.“ Die Übungsaufgaben (Langensteiner et al. 2011: 42-43) ähneln jenen von Brand et al. (2010: 105), wobei einige zusätzlich die Kenntnis von Ebenengleichungen erfordern, die in diesem Schulbuch bereits davor behandelt werden.

Das Buch *Mathematik Verstehen 5* von Malle et al. (2010a: 252-254, 260-261) bearbeitet das Thema Lagebeziehungen zweier Geraden in der Ebene zwei Mal, jeweils nach den Einführungen der Parameterdarstellung und der Normalvektordarstellung. Zur Untersuchung der Lagebeziehung zweier Geraden in Parameterform diskutieren Malle et al. (2010a: 252) zuerst zueinander parallele und aufeinander normal stehende Geraden bevor sie auf die drei oben beschriebene Fälle eingehen. Diese werden anhand einfacher Skizzen kurz beschrieben (Malle et al. 2010a: 253):



Das anschließende Musterbeispiel beinhaltet in seinen drei Unterpunkten jeweils die Untersuchung jeder Lagebeziehung (Malle et al. 2010a: 253). Die zweite Musteraufgabe zeigt die Bestimmung des Schnittpunkts zweier Geraden (Malle 2010a: 254). Die Übungsaufgaben erfordern beispielsweise die Untersuchung der Lagebeziehung zweier gegebener Geraden oder die Bestimmung des Schnittpunkts zweier schneidender Geraden. Aufgabe 14.47 (Malle et al. 2010a: 254) unterscheidet sich von den bisherigen Aufgaben mit Bezug auf Dreiecke, da hier die Eckpunkte eines Dreiecks durch den Schnitt jeweils zweier Geraden festgestellt werden sollen.

Die Erklärung für die Untersuchung von Lagebeziehungen in der Normalvektordarstellung fällt etwas kürzer aus, da hier schon auf das Vorwissen aus dem Kapitel über die gegenseitige Lage zweier Geraden in Parameterform aufgebaut werden kann (Malle et al. 2010a: 260). Trotzdem beinhaltet das Schulbuch zu jedem der drei Fälle eine Zeichnung, die die verschiedenen Möglichkeiten der Lagebeziehungen zweier Geraden aufzeigen. Des Weiteren zeigt ein Musterbeispiel die rechnerische Bestimmung der gegenseitigen Lage zweier Geraden in Normalvektorform, wobei diese ausmultipliziert wird, es wird also die allgemeine Form der Geradengleichung betrachtet. Durch die zugehörigen Übungsaufgaben können SchülerInnen erneut die Untersuchung der gegenseitigen Lage zweier Geraden und gegebenenfalls die Berechnung eines Schnittpunkts üben (Malle et al. 2010a: 261). Das über die Schnittpunktberechnungen angeeignete Wissen wird anschließend in der Berechnung der merkwürdigen Punkte von Dreiecken angewandt (Malle et al. 2010a: 262-263).

Die Lagebeziehungen zweier Geraden im $\mathbb{R}^3$ werden von Malle et al. (2010b: 177) im Schulbuch *Mathematik verstehen 6* ähnlich behandelt, wie jene im $\mathbb{R}^2$. Zeichnungen und eine kurze Erklärung zeigen die vier verschiedenen Möglichkeiten der Lage zweier Geraden im Raum. Ein Musterbeispiel (Malle et al. 2010b: 177-178) zeigt die Untersuchung der Lagebeziehung zweier Geraden anhand von vier Beispielen, sodass der Rechenweg für die Bestimmung jeder Lagebeziehung gezeigt wird. Eine Aufgabe gibt SchülerInnen die Möglichkeit die Bestimmung der Lagebeziehung zweier Geraden im Raum zu üben, während die andere, ähnlich zu dem im Brand et al. (2010: 105) angeführten Beispiel, die Ergänzung einer fehlenden Koordinate in einer der beiden gegebenen Gerade erfordert, sodass diese schneidend sind (Malle et al. 2010b: 178).

Bleier et al. (2014: 317) behandeln in ihrem Schulbuch *Dimensionen Mathematik 5* als einzige, wenn auch nur kurz, explizit die Lagebeziehung zwischen einem Punkt und einer Geraden. Im Anschluss daran werden wie bei Malle et al. (2010a: 252) zuerst parallele und

normale Geraden in Parameterform diskutiert, bevor auch idente und einander schneidende Geraden beleuchtet werden (Bleier et al. 2014: 318-320). Im Gegensatz zu den bisher betrachteten Schulbüchern beinhaltet dieses Schulbuch kein explizites Musterbeispiel zur Bestimmung von Lagebeziehungen, aber dennoch eine Musteraufgabe zur Berechnung des Schnittpunkts zweier schneidender Geraden. Wie bei den Abschnitten über die Normalvektorform einer Geradengleichung sind die Übungsaufgaben bei Bleier et al. (2014: 322-323) vielfältiger als bei Brand et al. (2009: 215) und Binder, Denninger & Urban-Woldron (2010: 221). Hier spielt nicht nur die Untersuchung der Lage zweier Geraden eine wichtige Rolle, sondern es wird auch das Aufstellen von Geraden, sodass sie parallel sind oder normal aufeinander stehen, erneut intensiv geübt. Des Weiteren beinhalten die Aufgaben wieder einige, die dem Typ 1 Format für die zentrale Reifeprüfung entsprechen. Aufgabe 1009 (Bleier et al. 2014: 322) beispielsweise ist abgestimmt auf das x aus 5 Format. Es ist eine Gerade in Parameterform gegeben und die SchülerInnen sollen jene der fünf Geraden, ebenfalls in Parameterdarstellung, ankreuzen, die die jeweils angegebene Lage erfüllen. In Aufgabe 1010 (Bleier et al. 2014: 323) müssen SchülerInnen jeweils zwei gegebene Geraden, erneut in der Parameterdarstellung, der Bezeichnung ihrer Lagebeziehung zuordnen. Auch die besonderen Punkte eines Dreiecks werden in den Übungsaufgaben von Bleier et al. (2014: 324) behandelt, wobei das Aufstellen von Winkelsymmetralen explizit davor besprochen wird (Bleier et al. 2014: 321).

Um die Lagebeziehung zweier Geraden im Raum näher zu betrachten, stellen Bleier et al. (2015: 253) die Aufgabe, in einem Bild von einer Liftstütze schneidende, idente, parallele und windschiefe Linien zu finden. Anschließend behandeln Bleier et al. (2015: 254-256) in vier Informationstexten jeden der vier möglichen Fälle für die Lage zweier Geraden im Raum detailliert und beleuchten die notwendigen Rechenschritte, um jede Lage bestimmen zu können. Die Übungsaufgaben (Bleier et al. 2015: 258-259) ähneln ebenso jenen aus den anderen Schulbüchern, wobei folgende Aufgabe im Format der Typ 1 Aufgaben für die zentrale Reifeprüfung auffällt (Bleier et al. 2015: 258):

762) Vervollständige den folgenden Satz, sodass er mathematisch korrekt ist. Wenn zwei Geraden $g: X = A + t \cdot \vec{g}$ und $h: X = B + u \cdot \vec{h}$ im $\mathbb{R}^3$ _____ ❶ _____, dann ist _____ ❷ _____

❶	
normal aufeinander stehen	☐
parallel zu einander sind	☐
identisch sind	☐

❷	
$\vec{h} = c \cdot \vec{g}$ mit $c \in \mathbb{R}$ und $B \notin h$	☐
$\vec{h} \parallel g$ und $\vec{g} \cdot \vec{h} = 0$	☐
$\vec{g} = c \cdot \vec{h}$ mit $c \in \mathbb{R}$ und $A \in h$	☐

Freiler et al. (2015: 252-254, 258-259) behandeln in ihrem Schulbuch *Lösungswege Mathematik Oberstufe 5* die Lagebeziehungen zweier Geraden im $\mathbb{R}^2$ jeweils für Geraden in der Parameterdarstellung und in der Normalvektordarstellung. Hinsichtlich der gegenseitigen Lage zweier Geraden in Parameterform werden, ähnlich wie bei Malle et al. (2010a: 253), die drei Fälle – ident, parallel und schneidend – mittels einer Zeichnung und einer kurzen Beschreibung vorgestellt (Freiler et al. 2015: 252). Das anschließende Musterbeispiel zeigt die Bestimmung der Identität zweier Geraden (Freiler et al. 2015: 252). Wie man einen Schnittpunkt bestimmt, ist also bisher noch nicht bekannt. Daher erfordern die folgenden Übungsaufgaben jeweils nur die Lagebestimmung, nicht aber die Berechnung des Schnittpunkts (Freiler et al. 2015: 253). Auch hier wird, wie bei Bleier et al. (2014), bereits auf die schriftliche Reifeprüfung und die Formate der Typ 1 Aufgaben hingearbeitet. Ein weiteres Musterbeispiel zeigt nun die Berechnung des Schnittpunkts zweier Geraden, sollte denn so einer existieren (Freiler et al. 2015: 253), auch dies wird anschließend in Übungsaufgaben trainiert (Freiler et al. 2015: 254). Wie in diesem Schulbuch üblich, gibt es wieder einen kurzen Abschnitt, der zeigt, wie diese Aufgaben mittels der neuen Technologie, GeoGebra und TI-Nspire, gelöst werden können (Freiler et al. 2015: 254). Auch im Hinblick auf die Untersuchung der Lagebeziehungen von Geraden, die in der allgemeinen Form gegeben sind, ähnelt der in diesem Schulbuch gewählte Ansatz dem in Malle et al. (2010a: 260), da erneut drei Zeichnungen mit kurzen Beschreibungen zur Erklärung der drei Fälle dienen (Freiler et al. 2015: 258). Eine interessante Übungsaufgabe ist dabei Aufgabe 1035 (Freiler et al. 2015: 259). Hier sind Lücken in der allgemeinen Form der Gerade h so auszufüllen, sodass diese und die gegebenen Gerade g ident ist:

1035) Fülle die Lücken so, dass die beiden Geraden ident sind.

a) $g: 3x - 4y = 12$

$h: -12x \underline{\hspace{1cm}} = \underline{\hspace{1cm}}$

Beim ersten Nebentermin am 21. September 2015 für die zentrale Reifeprüfung vom Schuljahr 2014/15 wurde im Hinblick auf die Lagebeziehungen zweier Geraden folgende in Abbildung 25 gezeigte Aufgabe gestellt (BIFIE 2015b: 8):

Aufgabe 4

Schnittpunkt einer Geraden mit der x-Achse

Gegeben ist folgende Parameterdarstellung einer Geraden g :

$$g: X = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix} \text{ mit } t \in \mathbb{R}$$

Aufgabenstellung:

Geben Sie die Koordinaten des Schnittpunktes S der Geraden g mit der x -Achse an!

$S =$ _____

Abbildung 25: Aufgabe der standardisierten Reifeprüfung vom 21. September 2015 (BIFIE 2015b: 8)

Diese Aufgabe entspricht also nicht der ‚Standardaufgabe‘, die in jedem Schulbuch enthalten ist, da die zweite Gerade nicht gegeben ist. Außerdem kann dieses Beispiel auch gelöst werden, ohne dem üblichen Rechenschema für den Schnitt zweier Geraden zu folgen. Insbesondere soll hier erkannt werden, dass die y -Koordinate 0 betragen und daher nur noch der Parameter t mittels koordinatenweiser Betrachtung der Geraden berechnet werden muss, um die x -Koordinate des Schnittpunkts zu berechnen.

5.5 Normalvektoren im $\mathbb{R}^2$ – AG 3.5

Die letzte Grundkompetenz im Abschnitt Vektoren AG 3.5 behandelt Normalvektoren im $\mathbb{R}^2$: „Normalvektoren in $\mathbb{R}^2$ aufstellen, verständig einsetzen und interpretieren können“ (Liebscher et al. 2013: 9). Wie diese in aktuellen Schulbüchern behandelt werden, wird im folgenden Abschnitt diskutiert.

Brand et al. (2009: 190) betrachten in ihrem Schulbuch *Thema Mathematik 5* Normalvektoren bereits direkt nach der Einführung des Skalarprodukts. Der Abschnitt „Orthogonale Vektoren“ (Brand et al. 2009: 190) wird durch folgende Definition begonnen:

Definition: Zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind orthogonal, wenn sie einen rechten Winkel einschließen.
 $\vec{a}$ orthogonal zu $\vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$

Dieser Definition folgt ein kurzes Musterbeispiel bei dem durch eine Zeichnung zwei Vektoren $\vec{b}$ und $\vec{c}$ abgelesen werden können, die zu einem gegebenen Vektor $\vec{a}$ orthogonal sind. Dabei wird explizit darauf hingewiesen, dass „[a]uch Vielfache von $\vec{b}$ und $\vec{c}$ [...] Normalvektoren zu $\vec{a}$ [sind]“ (Brand et al. 2009: 190). Inwiefern die gefundenen Normalvektoren $\vec{b}$ und $\vec{c}$ mit dem ursprünglichen Vektor $\vec{a}$ zusammenhängen, wird zumindest teilweise in folgendem Satz beantwortet:

Satz: Die Vektoren $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}$ sind orthogonal.

Obwohl der Gegenvektor bereits zuvor definiert worden ist (Brand et al. 2009: 184), dürfte es für SchülerInnen hier vielleicht nicht offensichtlich sein, dass auch der Vektor $\begin{pmatrix} a_2 \\ -a_1 \end{pmatrix}$ ein Normalvektor zum Vektor $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ ist, wobei dies durch den Hinweis über Vielfache erklärt werden könnte. Anhand eines weiteren Musterbeispiels wird nun der Zusammenhang zwischen der Orthogonalität zweier Vektoren und ihrem skalaren Produkt eingeführt (Brand et al. 2009: 190):

Orthogonalitätskriterium: Das skalare Produkt von Vektoren ist genau dann null, wenn sie orthogonal sind. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$

Die Anwendung des Orthogonalitätskriteriums spielt in den Übungsaufgaben eine zentrale Rolle (Brand et al. 2009: 191). Nach ein paar grundlegenden Beispielen, die das Bestimmen von orthogonalen Vektoren zu gegebenen Vektoren erfordern, manchmal mit gewissen Längenvorgaben, besteht die Hauptaufgabe der meisten Beispiele darin, Vektoren auf ihre Orthogonalität zu prüfen, um beispielsweise festzustellen, ob ein Dreieck rechtwinklig ist (Aufgabe 1105) oder ob ein Viereck einen oder mehrere rechte Winkel besitzt (Aufgabe 1107).

Ähnlich wie bei Brand et al. (2009: 190) wird bei Binder, Denninger & Urban-Woldron (2010: 199-200) eine Musteraufgabe vorgeführt, bei der orthogonale Vektoren anhand von einer Zeichnung aufgestellt werden. Hier wird bereits vor der Definition auf den Zusammenhang zwischen der Form der ursprünglichen Vektoren und der orthogonalen Vektoren hingewiesen. Bevor nun die Definition und der dazugehörige Merksatz eingeführt werden, wird die Frage gestellt, ob dieser Zusammenhang denn allgemein gültig sei (Binder, Denninger & Urban-Woldron 2010: 200). Dies wird mittels einer Zeichnung und kongruenten nach links und rechts gekippten Dreiecken begründet. Folgende Definition ergibt sich (Binder, Denninger & Urban-Woldron 2010: 200):

Zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind **orthogonal**, d.h. sie stehen normal aufeinander, wenn ihre Repräsentanten zueinander orthogonal sind. Man schreibt $\vec{a} \perp \vec{b}$.

Vektoren, die zueinander orthogonal sind, bezeichnet man als **Normalvektoren**.

Die Koordinaten des nach **links gekippten**, gleich langen **Normalvektors** zum Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$ erhält man mit $\vec{a}_L = \begin{pmatrix} -a_y \\ a_x \end{pmatrix}$, die Koordinaten des **nach rechts gekippten**, gleich langen **Normalvektors** mit $\vec{a}_R = \begin{pmatrix} a_y \\ -a_x \end{pmatrix}$.

Diese Unterscheidung zwischen nach links und rechts gekippten, gleich langen Normalvektoren ist bei Brand et al. (2009: 190) nicht zu finden. Des Weiteren ist die erneute Verwendung der Repräsentanten in der Definition bedeutsam. Außerdem wird bei der Definition den Aspekt der Länge geachtet. Wie schon Brand et al. (2009: 190) weisen auch Binder, Denninger & Urban-Woldron (2010: 201) daraufhin, dass es zu jedem Vektor unendlich viele Normalvektoren gibt, aber nur zwei gleich lange Normalvektoren. Im Zuge dieser Eigenschaft wird außerdem folgendes festgestellt: „Jeder Normalvektor eines Vektors $\vec{a}$ ist parallel zu dem um 90° nach rechts ($\vec{a}_R$) bzw. links ($\vec{a}_L$) gekippten Vektor.“ (Binder, Denninger & Urban-Woldron 2010: 201). Diese Eigenschaft wird nun dazu verwendet mittels koordinatenweiser Betrachtung der Parallelität von $\vec{b}$ und $\vec{a}_R$ das Skalarprodukt herzuleiten. Interessanterweise wird hierbei zuerst festgestellt, dass $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y = 0$ gilt, bevor die Rechenoperation des skalaren Produkts als solche bezeichnet wird. Diese wird nun als solche definiert, bevor das Orthogonalitätskriterium, ähnlich wie bei Brand et al. (2009: 201), eingeführt wird (Binder, Denninger & Urban-Woldron 2010: 201). Genauer ist dies bereits in Kapitel 5.3.3 behandelt worden, da dies auch im Schulbuch bereits zu diesem Zeitpunkt betrachtet worden ist. Wichtig für den Abschnitt der Normalvektoren ist das darauffolgende Musterbeispiel, welches zeigt, wie eine unbekannte Koordinate eines Vektors, der normal auf einen gegebenen Vektor stehen soll, berechnet werden kann (Binder, Denninger & Urban-Woldron 2010: 202). Diese Beispielart wurde auch zum Haupttermin der standardisierten Reifeprüfung aus dem Schuljahr 2014/15 gegeben (BIFIE 2015a: 9), wie Abbildung 26 zeigt:

Aufgabe 5

Vektoren

Gegeben sind zwei Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ -4 \end{pmatrix}$.

Aufgabenstellung:

Bestimmen Sie die unbekannte Koordinate b_1 , so, dass die beiden Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ normal aufeinander stehen!

$b_1 =$ _____

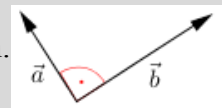
Abbildung 26: Aufgabe der standardisierten Reifepfprüfung vom 11. Mai 2015 (BIFIE 2015a: 9)

In den Übungsaufgaben sind sowohl einfachere, grundlegende Beispiele enthalten, die die Bestimmung orthogonaler Vektoren, mit selber oder verschiedener Länge, oder die Berechnung einzelner Koordinaten zur Erfüllung des Orthogonalitätskriteriums erfordern (Binder, Denninger & Urban-Woldron 2010: 207), als auch anspruchsvollere Aufgaben, bei denen eine unbekannte Koordinate des rechtwinkligen oder gleichschenkligen Dreiecks berechnet werden muss (Binder, Denninger & Urban-Woldron 2010: 208).

Malle et al. (2010a: 233) führen Normalvektoren ebenso noch vor der Behandlung der Geraden in der Ebene ein. Dabei wird erneut darauf geachtet, das Verständnis von Vektoren als algebraische Objekte, die geometrisch unter anderem durch Pfeile dargestellt werden können, beizubehalten (Malle 2010a: 233):

Zwei vom Nullvektor verschiedene Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aus $\mathbb{R}^2$ nennen wir **zueinander normal**, wenn die zugehörigen Pfeile aufeinander normal stehen.

Wir schreiben kurz: $\vec{a} \perp \vec{b}$.



Wichtig bei dieser Definition ist, dass die beiden Vektoren vom Nullvektor verschieden sein müssen. Ähnlich zu Binder, Denninger & Urban-Woldron (2010: 199-200) stellen auch Malle et al. (2010a: 233) fest, dass sich durch Kippen des rechtwinkligen Dreiecks, das durch einen Vektor und eine Koordinatenachse entsteht, Normalvektoren des ursprünglichen Vektors ergeben, wobei deren Koordinaten vertauscht sind und ein Vorzeichen geändert worden ist. Daraus folgt der Satz (Malle et al. 2010a: 233):

Satz: Ist $(a_1|a_2)$ ein vom Nullvektor verschiedener Vektor aus $\mathbb{R}^2$, dann sind die Vektoren $(-a_2|a_1)$ und $(a_2|-a_1)$ Normalvektoren dieses Vektors.

Im Gegensatz zu Brand et al. (2009: 190) nennen Malle et al. (2010a: 233) hier sowohl den nach links als auch den nach rechts gekippten Normalvektor. Es wird aber explizit darauf hingewiesen, dass obiger Satz „nur auf geometrischer Grundlage eingeführt und [...] nur geometrisch begründet [wurde]“ (Malle et al. 2010a: 233). Die Länge der Normalvektoren wird in diesem Satz nicht direkt angesprochen. In der Aufgabe 12.92 (Malle et al. 2010a: 233) wird dann schließlich darauf hingewiesen, dass auch Vielfache der gekippten Vektoren Normalvektoren des ursprünglichen Vektors sind. Die einzigen beiden Übungsaufgaben in diesem Abschnitt erfordern nur das Bestimmen von Normalvektoren zu gegebenen Vektoren (Malle et al. 2010a: 233). Mehr wurde beispielsweise beim ersten Nebentermin für die standardisierte Reifeprüfung im September 2015 auch nicht verlangt (BIFIE 2015b: 9), ersichtlich in Abbildung 27:

Aufgabe 5

Normalvektor

Gegeben sind die beiden Punkte $A = (-2|1)$ und $B = (3|-1)$.

Aufgabenstellung:

Geben Sie einen Vektor $\vec{n}$ an, der auf den Vektor $\overrightarrow{AB}$ normal steht!

Abbildung 27: Aufgabe der standardisierten Reifeprüfung vom 21. September 2015 (BIFIE 2015b: 9)

Das Thema Normalvektoren wird jedoch im Kapitel „Winkelmaß und Orthogonalität von Vektoren“ (Malle et al. 2010a: 241-244) erneut aufgegriffen. Dabei spielt vor allem das Skalarprodukt eine wichtige Rolle, daher wurde dies schon in Kapitel 5.3.3 detailliert behandelt.

In Bleier et al. (2014: 296) werden Normalvektoren erst eingeführt, nachdem die Berechnung des Winkels zwischen zwei Vektoren behandelt worden sind (2014: 293-295). Daher bezieht sich der folgende Satz (Bleier et al. 2014: 297) in seiner Begründung auf die Formel $\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$, für das Winkelmaß zwischen den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$:

Satz

Das **Skalarprodukt** zweier (vom Nullvektor verschiedenen) Vektoren ist genau dann **null**, wenn die beiden Vektoren einen **rechten Winkel** einschließen.

$$\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = 90^\circ \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

In einem Zusatz merken Bleier et al. (2014: 297) an, dass der Nullvektor, wenn er denn zugelassen werden, auf jeden Vektor normal steht, dies aber für die Aufgabenstellungen in

diesem Schulbuch irrelevant ist. Anschließend soll dieser Satz geometrisch anhand eines Beispiels ausprobiert werden. Des Weiteren beinhaltet dieses Schulbuch allgemeine Definitionen für Vektoren mit n Komponenten (Bleier et al. 2014: 297). Die folgenden geometrischen Aufgaben (Bleier et al. 2014: 298) führen zu einem Satz (Bleier et al. 2014: 299), der durch die um 90° nach links und rechts gekippten Vektoren $\begin{pmatrix} -y_a \\ x_a \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} y_a \\ -x_a \end{pmatrix}$ des Vektors $\vec{a} = \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \end{pmatrix}$ dessen Normalvektoren mit selber Länge vorschreibt. Auch hier wird angemerkt, dass alle anderen Normalvektoren sich von diesen beiden nur noch durch ihre Länge unterscheiden, also Vielfache dieser beiden Vektoren sind. Interessanterweise weisen Bleier et al. (2014: 297) auf den Unterschied zwischen den Begriffen ‚orthogonal‘ und ‚normal‘ hin, wobei letzteres für Vektoren mit zwei oder drei Komponenten verwendet kann, da diese geometrisch gedeutet werden können. Wie bereits bei anderen Themen bieten Bleier et al. (2014: 299-301) auch zu diesem Thema viele verschiedene Übungsaufgaben an. Folgende Aufgabe ist aber beispielsweise zu hinterfragen (Bleier et al. 2014: 299):

922) Kreuze jene Vektoren an, die gleich orientiert und auf den Vektor $\vec{a} = (-1|5)$ normal stehen:

☐ (2,5|0,5) ☐ (5|1) ☐ (-50|-10) ☐ (15|3)

Bei diesem Beispiel stehen aber alle möglichen Vektoren normal auf den gegebenen Vektor und damit ist nur die Orientierung für die Lösung relevant. Andere Beispiele ähneln jenen, die auch in den anderen Schulbüchern enthalten sind, wie beispielsweise das Bestimmen einer fehlenden Koordinate eines Vektors, sodass dieser zu einem gegebenen Vektor orthogonal ist oder die Überprüfung des Orthogonalitätskriteriums im Kontext der Geometrie, also in Quadraten, Deltoiden und anderen geometrischen Figuren. Außerdem inkludieren Bleier et al. (2014: 302) zwei Aufgaben, die dem Format der Typ 2 Aufgaben für die standardisierte Reifeprüfung entsprechen.

Auch Freiler et al. (2015: 234) führen das Orthogonalitätskriterium im Anschluss an die Berechnung des Winkels zwischen zwei Vektoren ein und begründen dieses durch die obige Formel zur Berechnung des Winkelmaßes. Des Weiteren achten Freiler et al. (2015: 234) ebenso wie Malle et al. (2010a: 233) darauf, dass Vektoren immer noch als algebraische Objekte, die als Pfeile geometrisch dargestellt werden können, interpretiert werden. Nachdem das Orthogonalitätskriterium besprochen und kurz begründet worden ist, zeigt ein Musterbeispiel, wie dieses angewendet werden kann, um zu prüfen, ob zwei Vektoren normal aufeinander stehen. Die folgenden Übungsbeispiele (Freiler et al. 2015: 234-235) helfen SchülerInnen,

dieses Kriterium in verschiedenen, geometrischen Kontexten anzuwenden. Erst im anschließenden Kapitel wird das „Finden von Normalvektoren“ (Freiler et al. 2015: 236-238) diskutiert. Dabei wird mittels einer Skizze folgender Merksatz hergeleitet (Freiler et al. 2015: 236):

Ist der Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ gegeben, dann gilt:

$$\vec{n}_a^l = \begin{pmatrix} -y_a \\ x_a \end{pmatrix} \quad (\text{nach links gekippter Normalvektor von } \vec{a})$$

$$\vec{n}_a^r = \begin{pmatrix} y_a \\ -x_a \end{pmatrix} \quad (\text{nach rechts gekippter Normalvektor von } \vec{a})$$

Auch alle Vielfachen dieser Normalvektoren sind Normalvektoren auf $\vec{a}$.

Freiler et al. (2015: 236) unterscheiden, wie schon Binder, Denninger & Urban-Woldron (2010: 200), zwischen nach links und nach rechts gekippten Normalvektoren und weisen ebenso explizit daraufhin, dass Vielfache der Normalvektoren ebenfalls normal auf den ursprünglichen Vektor stehen. Neben kurzen grundlegenden Aufgaben, bei denen dies trainiert und dabei auch auf die Länge geachtet werden soll, zeigen Freiler et al. (2015: 237) in zwei Musterbeispielen auch die Anwendung der Normalvektoren im Quadrat und in der Raute. Durch die übrigen Übungsaufgaben (Freiler et al. 2015: 238) können SchülerInnen anhand dieser Musteraufgaben ähnliche Aufgaben mit Rechtecken, Rauten, Deltoiden und gleichschenkligen Dreiecken versuchen zu lösen.

Obwohl diese Grundkompetenz explizit darauf abzielt, Normalvektoren im $\mathbb{R}^2$ zu betrachten, wurde beim zweiten Nebentermin für die schriftliche Reifeprüfung des Schuljahres 2014/15 folgende Aufgabe gestellt (BIFIE 2016a: 8), wie Abbildung 28 zeigt:

Aufgabe 4

Normalvektoren

Gegeben ist der Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Aufgabenstellung:

Bestimmen Sie die Koordinate z_b des Vektors $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ z_b \end{pmatrix}$ so, dass $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufeinander normal stehen!

$z_b =$ _____

Abbildung 28: Aufgabe der standardisierten Reifeprüfung vom 15. Jänner 2016 (BIFIE 2016a: 8)

6 Technologieeinsatz im Hinblick auf die schriftliche standardisierte Reifeprüfung am Beispiel von GeoGebra und TI-Nspire

Laut dem BIFIE (2015c: 5) ändert sich der Stellenwert mathematischer Inhalte der Sekundarstufe II insofern, dass neue Inhalte unter anderem durch vermehrten Einsatz neuer Technologien an Bedeutsamkeit gewinnen. Der verstärkte Einsatz dieser elektronischen Hilfsmittel steht in direktem Zusammenhang mit den Möglichkeiten im Hinblick auf verschiedene Inhalte des Mathematikunterrichts in der Sekundarstufe II. In den Worten vom BIFIE (2015c: 4): „Die verfügbaren elektronischen Hilfsmittel eröffnen eine neue Dimension der Schulmathematik.“ Dabei bekräftigt das BIFIE (2015c: 4) vor allem, dass dadurch „eine Verschiebung von der Ausführung zur Planung von Problemlösungen stattfindet.“ Das Operieren, also die Ausführung bestimmter Rechnungen und Rechenwege, rückt daher in den Hintergrund, während der Planung durch Nutzung von Grundwissen und schlussendlich der Reflexion über Ergebnisse mehr Bedeutung zukommt. Hierbei ist besonders zu betonen, dass sich die Reflexion über Ergebnisse von früheren Vorgehensweisen ohne die Unterstützung der heutigen elektronischen Hilfsmittel unterscheidet. Das BIFIE (2015c: 4) beschreibt dies so: „Technologie zwingt also zur Reflexion über die ‚verwendete Mathematik‘, weil über Ergebnisse reflektiert wird, die man nicht selbst produziert hat, und unterstützt so kontextbezogene Reflexion.“

Über die Rahmenbedingungen der schriftlichen standardisierten Reifeprüfung in Mathematik schreibt das BIFIE (2013: 24) für den Einsatz von Technologien für die Termine vor dem Haupttermin 2018 vor, dass „die gewohnten Hilfsmitteln in beiden Teilen erlaubt sein werden“, aber die Aufgaben des ersten Teils so gestellt seien, sodass diese großteils auch ohne elektronische Hilfsmittel lösbar seien. Zu den Anforderungen an die Technologie schreibt die Reifeprüfungsverordnung (RPVO) laut dem BIFIE (2013: 24) folgendes vor:

Die in der RPVO formulierten minimalen Anforderungen an die Technologie werden von allen Systemen erfüllt, welche grundlegende Funktionen einer Dynamische-Geometrie-Software, einer Tabellenkalkulation sowie eines Computeralgebrasystems beherrschen (z. B. Handheld-Rechner, Computer mit entsprechender Software).

Dabei wird explizit darauf hingewiesen, dass diese elektronischen Hilfsmittel während der Prüfung nicht für den Informationsaustausch beispielsweise über das Internet verwendet werden dürfen. Die obigen Minimalanforderungen, die das BIFIE (2013: 24) in ihrem Konzept zur standardisierten schriftlichen Reifeprüfung in Mathematik noch im März 2013 angeführt

hat, werden vom BIFIE (2015c: 24) nun im Jahre 2015, drei Jahre vor Ende der Übergangsfrist, genauer ausgeführt, denn diese müssen verpflichtend ab dem Haupttermin 2018 bei der standardisierten schriftlichen Reifeprüfung verwendet werden:

Die Minimalanforderungen an elektronische Hilfsmittel sind grundlegende Funktionen zur Darstellung von Funktionsgraphen, zum numerischen Lösen von Gleichungen und Gleichungssystemen, zur Ermittlung von Ableitungs- bzw. Stammfunktionen, zur numerischen Integration sowie zur Unterstützung bei Methoden und Verfahren in der Stochastik.

Das BIFIE erklärt hier also genauer, was die elektronischen Hilfsmittel zumindest in mathematischer Hinsicht können müssen. Für die Vektorrechnung am ehesten relevant ist dabei die Lösung von Gleichungen und Gleichungssystemen, um zum Beispiel den Schnittpunkt zweier Geraden, in Parameterform oder Normalvektorform angegeben, zu bestimmen. Weitere Möglichkeiten elektronischer Hilfsmittel im Hinblick auf die Vektorrechnung, wie beispielsweise die Darstellung von Vektoren als Pfeilen und Geraden in Parameter- oder Normalvektorform, werden hier vom BIFIE nicht genannt.

Zwei Technologien, die den hier angeführten Anforderungen entsprechen, sind einerseits das Computerprogramm GeoGebra und andererseits der TI-Nspire. Diese beiden Technologien werden daher in diesem Kapitel im Zusammenhang mit den Anforderungen für die standardisierte schriftliche Reifeprüfung im Hinblick auf die Grundkompetenzen bezüglich der Vektorrechnung näher betrachtet. Von GeoGebra ist dabei die Version 5.0.223.0 verwendet worden, vom TI-Nspire die Version 4.0.0.235. Beide Technologien stellen ein Computeralgebrasystem (CAS) und eine Graphik-Ansicht zur Verfügung.

6.1 Vektoren als Zahlentupel – AG 3.1

Da sich diese Grundkompetenz insbesondere auf die Deutung und Interpretation von Vektoren in verschiedenen Kontexten bezieht, können sowohl GeoGebra, als auch der TI-Nspire nicht sehr umfassend eingesetzt werden kann. Nichtsdestotrotz ist das Verständnis der SchülerInnen hinsichtlich der Vektoren als n -Tupel essenziell, da in GeoGebra beispielsweise Vektoren in der Graphik- sowie in der CAS-Ansicht in der jeweiligen Eingabezeile als n -Tupel definiert werden müssen, um mit diesen im CAS zu rechnen oder diese im Graphik-Fenster darzustellen. In der Eingabezeile des Graphik-Fensters können Vektoren mit einem Gleichheitszeichen definiert werden, während für die Eingabezeile in der CAS-Ansicht das Definitionssymbol $\coloneqq$ verwendet werden muss: Auch im CAS des TI-Nspire müssen Vektoren entweder mittels des Definitionssymbols als n -Tupel definiert werden, um anschließend mit ihnen rechnen zu

können, oder zumindest in eckigen Klammern $[a_1, a_2, \dots, a_n]$ für $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ eingegeben werden. Durch die Verwendung der eckigen Klammern erhält man in der CAS-Ansicht Vektoren in der Zeilenschreibweise. Um Vektoren in der Spaltenschreibweise anzuschreiben, kann man im Falle von zwei-dimensionalen Vektoren die $\begin{bmatrix} | & | \end{bmatrix}$ -Taste verwenden oder im Falle von mehr-dimensionalen Vektoren im Menü *Matrix und Vektor* → *Erstellen* → *Matrix* auswählen und in dem erschienenen Fenster die gewünschte Zeilenanzahl eingeben und die Spaltenzahl auf 1 setzen. Im Gegensatz zum TI-Nspire kann GeoGebra nur mit Vektoren aus dem $\mathbb{R}^2$ und dem $\mathbb{R}^3$ rechnen, während der TI-Nspire beliebig viele Koordinaten erlaubt. Dieser Mangel von GeoGebra kann durch das Schreiben einer Liste mittels geschwungener Klammern umgangen werden, die Rechenoperationen, vor allem die Berechnung des Skalarprodukts, funktionieren aber mit diesen Listen teilweise eher kompliziert.

Die geometrische Darstellung in der jeweiligen Graphik-Ansicht sowie die Durchführung Rechenoperationen im jeweiligen CAS sind nicht mehr Teil der Grundkompetenz AG 3.1 und werden in den entsprechenden Abschnitten, Kapitel 6.2 und 6.3, betrachtet.

6.2 Geometrische Deutung von Vektoren – AG 3.2

In GeoGebra lassen sich sowohl Punkte, als auch Pfeile einfach zeichnen. Ableitinger et al. (2014: 68) betonen, dass GeoGebra zwischen Pfeilen und Punkten hinsichtlich der Rechnungen nicht unterscheidet. GeoGebra führt hier die Rechenoperation mit zwei Zahlenpaaren durch, unabhängig von deren geometrischen Darstellungen, dies postuliert auch Malle (2007: 87). Im Hinblick auf die Unterscheidung der geometrischen Darstellung als Punkt oder Pfeil funktioniert GeoGebra laut Ableitinger et al. (2014: 68) so, wie es auch Malle (2007: 85) vorschreibt: mittels Großbuchstaben definierte Zahlenpaare und -tripel werden als Punkte gedeutet und mittels Kleinbuchstaben definierte Zahlenpaare und -tripel als Pfeile, wobei bei letzterer Schreibweise der Vektorpfeil über dem Kleinbuchstaben in GeoGebra nicht relevant ist. Um die geometrische Darstellung der Zahlentripel zu sehen, muss unter *Ansicht* das Feld *3D Grafik* aktiviert werden.

Im weiteren Verlauf zeigen Ableitinger et al. (2014: 70) wie Vektoren, die bereits gezeichnet worden sind, anschließend verschoben werden können. Dabei kann einerseits durch Anklicken der Spitze im Zugmodus der Endpunkt des Vektors verändert werden oder aber durch

Anklicken des Schafts der gesamte Vektor parallel verschoben werden. Die Parallelverschiebung kann verwendet werden, um zu verdeutlichen, dass ein Zahlenpaar durch unendlich viele Pfeile dargestellt werden kann, da der Pfeil hier beliebig parallel verschoben werden kann, die Koordinaten aber konstant bleiben. Dies würde also auch das Verständnis des Pfeilklassenmodells unterstützen.

Auffällig ist, dass GeoGebra Zahlenpaare, die mit Kleinbuchstaben beschriftet werden und daher als Pfeile in der Graphik-Ansicht dargestellt werden, immer vom Ursprung aus zeichnet. Will man einen Vektor von einem vom Ursprung verschiedenen Punkt abtragen, so kann man, nachdem man den Vektor vom Ursprung geometrisch dargestellt hat, mit Hilfe des Werkzeugs *‚Vektor von Punkt aus abtragen‘* diesen beliebigen Anfangspunkt einzeichnen oder auswählen und den entsprechenden Pfeil auswählen, sodass GeoGebra den ausgewählten Pfeil an den ausgewählten Anfangspunkt anhängt, wie auch Ableitinger et al. (2014: 73) zeigen.

Des Weiteren kann auch ein Verbindungsvektor $\overrightarrow{AB}$ mit Anfangspunkt A und Endpunkt B gezeichnet werden, indem man in der Werkzeugleiste ebenfalls im dritten Feld von links *‚Vektor‘* auswählt. Nun bestimmt man im Graphik-Fenster einen Anfangs- und Endpunkt und GeoGebra verbindet diese beiden Punkte mit einem Vektorpfeil. Diese Funktion kann auch verwendet werden, wenn Pfeile zwischen bestehenden Punkten gezeichnet werden sollen (Ableitinger et al. 2014: 71). Wichtig ist, die SchülerInnen darauf hinzuweisen, dass die Spitze-minus-Schaft-Regel nicht einfach in die Eingabezeile eingegeben werden darf, um entsprechende Vektoren geometrisch darzustellen. Die Eingabe $B - A$ würde nämlich zu der Bestimmung eines Punktes mit den Koordinaten $B - A$ führen und nicht zur Darstellung eines Pfeiles von A nach B . Um dies zu umgehen, muss man bereits in der Eingabezeile mittels Kleinbuchstaben definieren, dass hier ein Pfeil gezeichnet werden soll. Mit $w = B - A$ in der Eingabezeile der Graphik-Ansicht sowie mit $w := B - A$ im CAS erhält man so den gesuchten Pfeil, welcher aber vom Ursprung aus eingezeichnet wird und nicht verschiebbar ist (Ableitinger et al. 2014: 71).

Dorfmayr et al. (2011: 18) weisen zusätzlich auf die Befehle *‚Vektor[A,B]‘* und *‚Vektor[A]‘* hin, wobei ersterer zur Darstellung eines Vektorpfeils mit Anfangspunkt A und Endpunkt B führt, während zweiterer einen Ortsvektor vom Ursprung ausgehend zum Punkt A darstellt.

Bezüglich der graphischen Darstellung von Vektoren als Punkte beziehungsweise Pfeile bietet der TI-Nspire weniger Möglichkeiten. Punkte und Pfeile können zwar generell in der Graphik-Ansicht gezeichnet und auch verschoben werden. Es besteht aber kein direkter

Zusammenhang mit einem CAS, sodass die gezeichneten Punkte und Pfeile für Rechnungen übernommen werden können. Um Punkte mit vorgegebenen Koordinaten zu zeichnen, muss nach Auswahl von dem Werkzeug ‚Punkt‘ im Menü unter ‚Geometry‘ → ‚Punkte & Geraden‘ eine runde Klammer eingegeben werden, sodass die Graphik-Ansicht des TI-Nspire nun ein kleines Fenster öffnet, in welches man nun die gewünschten Koordinaten des Punktes eingeben kann. Selbiges gilt unter anderem auch für die Werkzeuge ‚Vektor‘ und ‚Gerade‘, die ebenso unter ‚Geometry‘ → ‚Punkte & Geraden‘ zu finden sind.

6.3 Rechenoperationen – AG 3.3

Im Hinblick auf die mit Vektoren durchführbaren Rechenoperationen bieten GeoGebra und der TI-Nspire verschiedene Möglichkeiten diese rechnerisch und teilweise auch graphisch durchzuführen. Wie bereits erwähnt können Rechenoperationen unabhängig von den unter Umständen unterschiedlichen geometrischen Darstellungen der Vektoren durchgeführt werden. Dies kann vor allem bei der Addition und Subtraktion zweier Vektoren der Fall sein, wobei bereits in Kapitel 4.4.1 zwischen der Punkt-Pfeil-Darstellung und der Pfeil-Pfeil-Darstellung unterschieden wird. Um lediglich die Summe zweier Vektoren zu berechnen, kann man diese mittels runder Klammern eingeben und direkt berechnen, zum Beispiel durch folgende Eingabe im CAS: $(1,2) + (2,3) =$. Selbige Eingabe ohne Gleichheitszeichen funktioniert in der Eingabezeile der Graphik-Ansicht. Für die Subtraktion gelten die gleichen Eingaberegeln, wobei das Pluszeichen durch ein Minuszeichen ersetzt werden muss. Will man die Summe oder Differenz zweier Vektoren rein rechnerisch bestimmen, ohne diese graphisch darzustellen, so empfiehlt es sich, das CAS zu verwenden, da in der CAS-Ansicht die jeweilige Rechnung auch nach dem Resultat direkt ablesbar ist. Wird die Rechnung in die Eingabezeile der Graphik-Ansicht eingegeben, so erhält man zwar ein Ergebnis, aber die ursprüngliche Rechnung ist nicht mehr einsehbar oder veränderbar und das Ergebnis muss erst im Algebra-Fenster gesucht werden. Außerdem können natürlich Vektoren – als Punkte, Pfeile oder gar nicht dargestellt – im Vorhinein definiert und anschließend nur noch deren Variablenbezeichnungen eingegeben werden, zum Beispiel $A + v =$ im CAS, beziehungsweise ohne Gleichheitszeichen im Graphik-Fenster. Hinsichtlich der Addition taucht bei GeoGebra erneut das Problem auf, dass nur zwei- beziehungsweise drei-dimensionale Vektoren eingegeben und dargestellt werden können. Dies kann jedoch durch die Verwendung von geschwungenen Klammern und sogenannten Listen umgangen werden. Definiert man beispielsweise die Vektoren $a := \{2, -1, 0, 1\}$ und $b := \{3, 0, 3, -2\}$, so erhält man durch die

Eingabe $a + b$ im CAS $\{5, -1, 3, -1\}$ und durch die Eingabe $a - b$ erhält man ebenfalls korrekterweise $\{-1, -1, -3, 3\}$.

Im CAS des TI-Nspire hat man ebenso die Möglichkeit mit vorher definierten Vektoren zu rechnen oder aber mittels Eingabe von eckigen Klammern direkte Additionen und Subtraktionen durchzuführen, wie zum Beispiel $[3, 3, 5, 1] + [2, 1, 2, 3]$. Wichtig ist es, SchülerInnen darauf hinzuweisen, dass sich die vom TI-Nspire angezeigte Zeilenschreibweise von Vektoren nicht von der in der Schule eher üblichen Spaltenschreibweise unterscheidet. Um im CAS Vektoren in der Spaltenschreibweise zu erzeugen, muss, wie in Kapitel 6.1 beschrieben, eine Matrix erstellt werden. Im Fall von zwei-dimensionalen Vektoren kann auch die Taste $\left[\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \end{array} \right]$ verwendet werden. Natürlich müssen bei einer Addition zweier Vektoren beide Vektoren in der gleichen Schreibweise angegeben werden, ansonsten besteht laut TI-Nspire ein *Dimensionsfehler*. Die Möglichkeit, wie bei GeoGebra Vektoren mittels geschwungener Klammern im CAS einzugeben, gibt es auch im CAS des TI-Nspire. Diese Funktion für einfache Rechenoperationen zu nutzen ist aber beim TI-Nspire nicht notwendig, da dieser CAS im Gegensatz zu jenem von GeoGebra die Definition von Vektoren mit mehr als drei Komponenten ohnehin erlaubt.

Bezüglich der graphischen Darstellung der Vektoraddition gibt es, wie bereits erwähnt, die essenzielle Unterscheidung zwischen der Punkt-Pfeil-Addition und der Pfeil-Pfeil-Addition. Da GeoGebra in der Eingabezeile der Graphik-Ansicht Zahlenpaare, die nicht mittels Groß- und Kleinbuchstaben definiert werden, als Punkte deutet, sollten für die Darstellungen der beiden Möglichkeiten der Addition bereits vorab als Punkte beziehungsweise Pfeile definierte Zahlenpaare verwendet werden. Für die Darstellung der Punkt-Pfeil-Addition gibt es laut Ableitinger et al. (2014: 72) zwei sinnvolle Möglichkeiten, nachdem man einen Punkt A und einen Pfeil v bereits definiert hat. Einerseits kann man durch die Funktion *Vektor von Punkt aus abtragen*, den Punkt A und den Pfeil v auswählen und GeoGebra stellt die Punkt-Pfeil-Addition graphisch so dar, wie sie bereits in Kapitel 4.4.1 diskutiert worden ist. Den Endpunkt dieses Pfeils bezeichnet GeoGebra nun automatisch mit A' . Andererseits kann man diese graphische Darstellung mittels Eingabe des Befehls *Vektor* $[A, A + v]$ erzeugen. Dabei wird der Endpunkt des Pfeils allerdings nicht angezeigt. Um Vektoren nicht vorher definieren zu müssen, kann man auch erst bei der Eingabe des obigen Befehls statt A und v Zahlenpaare mittels runder Klammern eingeben. Alternativ kann man auch im Zugmodus den von GeoGebra vom Ursprung aus gezeichneten Pfeil durch Anklicken des Schafts verschieben, sodass sich ebenfalls eine Darstellung der Punkt-Pfeil-Addition ergibt.

Auch in diesem Fall wird der Endpunkt allerdings weder angezeigt noch berechnet. Um die Pfeil-Pfeil-Addition darzustellen folgt man am besten den Anweisungen in Ableitinger et al. (2014: 75). Zuerst definiert man die beiden Vektoren a und b , die als Pfeile dargestellt addiert werden sollen. Durch die Befehle $A = a'$ und $B = b'$ werden auch die Endpunkte dieser beiden Pfeile definiert. Mittels des Befehls *Vektor von Punkt aus abtragen*¹⁰ trägt man den Pfeil a von B und den Pfeil b von A aus ab. Der Befehl $a + b'$ führt zu demselben Endpunkt wie die beiden eben abgetragenen Vektorpfeile. Durch Bearbeiten der Farben und Linienformen sowie Ausblenden der zur Konstruktion benötigten Punkte ergibt sich das in Abbildung 29 dargestellte Bild:

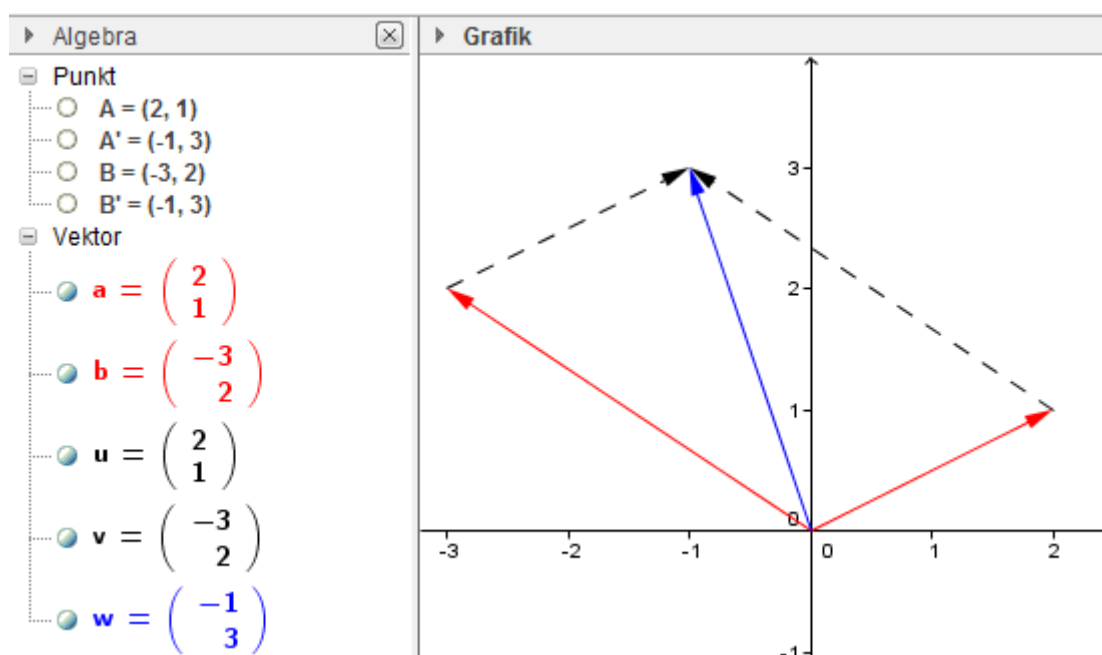


Abbildung 29: Die Pfeil-Pfeil-Addition in GeoGebra¹⁰

Als Erweiterung der Pfeil-Pfeil-Addition kann man mit dem Werkzeug *Vieleck* gezeichnete Vielecke durch das Werkzeug *Verschiebe um Vektor* verschieben.

Im Graphik-Fenster des TI-Nspire sind Vektoren zwar vertreten und können eingezeichnet werden. Die Vektoraddition kann jedoch graphisch nicht wie bei GeoGebra durchgeführt werden.

Die zweite relevante Rechenoperation ist die Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar. Ähnlich zur Addition kann auch die Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar sowohl in der Eingabezeile der Graphik-Ansicht, als auch in jener der CAS-Ansicht berechnet werden. Wie auch bei der Addition ist es des Weiteren möglich eine Multiplikation eines Vektors mit einer Variablen, die für eine reelle Zahl steht, durchzuführen. Führt man die

¹⁰ Diese Abbildung wurde von der Verfasserin der Diplomarbeit mit GeoGebra erstellt.

Multiplikation des Vektorpfeils $v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ mit der reellen Zahl r im CAS durch, so erhält man gemäß dieser Rechenoperation $r \cdot v = r \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cdot x \\ r \cdot y \end{pmatrix}$, ebenso für $v \in \mathbb{R}^3$. Um eine Multiplikation eines Vektors mit mehr als drei Komponenten und einem Skalar durchzuführen, muss man im CAS von GeoGebra erneut auf die Listenschreibweise mittels geschwungener Klammern zurückgreifen.

Auch das CAS des TI-Nspire erfordert ähnliche Befehle für diese Rechenoperation wie bereits bei der Addition zweier Vektoren. Erneut kann man frei zwischen der Zeilen- und Spaltenschreibweise wählen, wobei erstere leichter und schneller einzugeben aber wahrscheinlich ungewohnter für SchülerInnen ist. Wie GeoGebra erlaubt das CAS vom TI-Nspire gleichermaßen die Multiplikation eines Vektors, dessen Koordinaten gegebenenfalls nur durch Variable gegeben sind, mit einem Skalar, welcher allenfalls ebenso eine Variable sein kann.

Im Hinblick auf die graphische Darstellung dieser Rechenoperation bietet GeoGebra abermals bessere Möglichkeiten. Dank der zusätzlichen 3D-Ansicht können, wie bei der Addition, sowohl die Multiplikation eines zwei-, als auch eines drei-dimensionalen Vektors graphisch dargestellt werden. Durch Ausprobieren können SchülerInnen so selbst erkunden, welchen Einfluss die Größe des Skalars geometrisch hat. Dadurch können sie selbst die in Kapitel 5.3.2 betrachteten Fallunterscheidungen entdecken, betrachten und diskutieren. Das Graphik-Fenster des TI-Nspire hat zwar ebenfalls eine 3D-Ansicht, kann die in GeoGebra vorhandenen Möglichkeiten aber auf Grund der viel komplizierteren Bedienung nicht bieten.

Die dritte hier beleuchtete Rechenoperation ist das Skalarprodukt zweier Vektoren. Im CAS von GeoGebra lässt sich das Skalarprodukt wie bereits die Addition zweier Vektoren und die Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar errechnen. Außerdem kann der Befehl `„Skalarprodukt[< Vektor >, < Vektor >]“` verwendet werden, um das Skalarprodukt der zweier Vektoren zu berechnen. Bezüglich Vektoren aus dem $\mathbb{R}^n$ mit $n > 3$ für $n \in \mathbb{N}$ hat sich hier allerdings in älteren Versionen von GeoGebra ein Problem ergeben, da die Multiplikation zweier Listen eine neue Liste ergeben hat, bei der die jeweilig ersten, zweiten, dritten, etc. Komponenten miteinander multipliziert worden sind, diese Produkte aber nicht aufsummiert worden sind. Um schließlich das Skalarprodukt zu erhalten, musste man mittels des Befehls `„Summe“` noch die Summe der Koordinaten der Liste berechnen. Bei der hier verwendeten Version ergibt die Multiplikation zweier Listen jedoch bereits das gewünschte Ergebnis, nämlich das Skalarprodukt.

Um das Skalarprodukt der Vektoren a und b mit Hilfe des TI-Nspire zu berechnen, kann entweder die Multiplikation zweier Vektoren oder aber der Befehl `,dotP(a,b)‘` eingegeben werden. Bei ersterer Variante müssen SchülerInnen aber darauf achten, dass eine 4×1 -Matrix nicht mit einer 4×1 -Matrix multipliziert werden darf, sondern mit einer 1×4 -Matrix multipliziert werden müsste. Ein Vektor müsste also in Zeilenschreibweise und der andere in Spaltenschreibweise eingegeben werden. Dieses Problem könnte zwar, wie in älteren Versionen von GeoGebra oben beschrieben, durch die Listenschreibweise mittels geschwungener Klammern umgangen werden, dies scheint aber unnötig kompliziert.

Bezüglich der graphischen Bedeutung des Skalarprodukts zweier Vektoren ist festzuhalten, dass die SchülerInnen durch das Verändern der Vektoren im Zugmodus in GeoGebra selbst probieren können, inwiefern sich das Ergebnis des Skalarprodukts verändert, wenn die Vektorpfeile verschoben werden. Dadurch können sie erneut selbst die in Kapitel 5.3.3 betrachtete Fallunterscheidung erkunden und beschreiben. Dies funktioniert besonders gut, wenn man zusätzlich das Werkzeug *Winkel* verwendet, um anhand des sich verändernden Winkels den Zusammenhang zu dem Skalarprodukt festzustellen. Wie bereits bei den vorhergehenden Rechenoperationen bietet der TI-Nspire in graphischer Hinsicht wenig Spielraum und Möglichkeiten im Gegensatz zu GeoGebra.

6.4 Geraden im $\mathbb{R}^2$ (und im $\mathbb{R}^3$) – AG 3.4

Wie in Kapitel 5.4 behandelt dieser Abschnitt die verschiedenen Darstellungsformen einer Geraden und deren Lagebeziehungen zueinander. Um die Parameterdarstellung einer Geraden für SchülerInnen verständlich zu machen, bietet sich die Verwendung der Graphik-Ansicht in GeoGebra an: Hängt man an einen beliebigen Punkt A einen Vektor v an und verwendet anschließend das Werkzeug *Gerade*, so kann man mittels Klick auf den Punkt A und den Vektorpfeil eine Gerade erzeugen. Der Vektor v gibt also die Richtung vor. Noch eindeutiger wäre dies, wenn GeoGebra eine Funktion anbieten würde, mittels derer eine Gerade durch das Auswählen eines Punkts und eines Vektors gezeichnet werden könnte. Dadurch könnte im Zugmodus der Vektor beliebig verschoben und der Zusammenhang mit der Geraden gezeigt werden. Die Alternative zu obener Prozedere ist zwar womöglich schneller und einfacher, geht aber von zwei gegebenen Punkten und nicht einem Punkt und einem Richtungsvektor aus, wobei sich ein zweiter Punkt bei gegebenem Richtungsvektor einfach errechnen ließe. Mittels der Funktion *Vektor* zeichnet man zwei Punkte A und B in das Koordinatensystem, die durch einen Pfeil v verbunden werden. Erstellt man nun mit Hilfe des Werkzeugs *Gerade* eine

Gerade g durch diese beiden Punkte, liegt der Vektor v auf ebendieser Geraden. Verändert man nun im Zugmodus den Punkt A oder B , so verändern sich in gleicher Weise der Vektor v und auch die Gerade g . Zusätzlich kann man mittels des Werkzeugs ‚*Vektor*‘ auch auf eine bereits gezeichnete Gerade einen Vektor einzeichnen. Bewegt man im Zugmodus den Anfangs- oder Endpunkt dieses Vektors, so sieht man, dass man durch die Addition dieses Vektors zu einem Punkt auf der Geraden jeden anderen Punkt dieser Geraden erzeugen kann. Noch besser ersichtlich wird dies mittels eines Schiebereglers für den Parameter t in der Geradengleichung $X = P + t \cdot \vec{g}$, wie es Ableitinger et al. (2014: 84) vorschlagen. Dabei kann man auch zeigen, dass sich durch die Begrenzung des Parameters t im Intervall $[0; 1]$ eine Strecke zwischen zwei Punkten ergibt, wie es Bleier et al. (2014: 311) betonen.

Obige Ausführungen dienen nur dem besseren Verständnis der Parameterdarstellung einer Geraden. Um Geraden aufzustellen und mit ihnen zu rechnen sind obige Anleitungen wahrscheinlich nicht notwendig. Eine Gerade kann in der Eingabezeile der Graphik-Ansicht direkt in der Form $X = P + t \cdot \vec{g}$ eingegeben werden. In der Zeichnung dieser Geraden werden der Punkt P und der Richtungsvektor $\vec{g}$ allerdings nicht angezeigt. Verwendet man in der jeweiligen Eingabezeile der CAS-Ansicht oder der Graphik-Ansicht den Befehl ‚*Gerade*[< Punkt >, < Punkt >]‘ oder ‚*Gerade*[< Punkt >, < Richtungsvektor >]‘, so wird die Gerade im Algebra-Fenster in der allgemeinen Form angegeben. Um die Parameterform dieser Geraden zu erhalten, muss mittels Rechtsklick ‚*Parameterdarstellung*‘ ausgewählt werden. Auch die explizite Form der Geraden erhält man mittels Rechtsklick und Auswahl von ‚ $y = k \cdot x + d$ ‘. Der Wechsel zwischen den verschiedenen Darstellungsformen einer Geradengleichung wird also durch einen einfachen Mausklick ermöglicht.

Viele der Beispiele in Schulbüchern, wie in Kapitel 5.4 diskutiert, erfordern beispielsweise das Bestimmen von Trägergeraden, Höhenlinien, Seitensymmetralen, Schwerlinien und Winkelsymmetralen in einem Dreieck. Trägergeraden können mittels des Werkzeugs ‚*Gerade*‘ und durch Anklicken je zweier Eckpunkte aufgestellt und konstruiert werden. Um die Höhenlinien einzuzichnen, ist das Werkzeug ‚*Senkrechte Gerade*‘ zu verwenden und jeweils ein Eckpunkt und die gegenüberliegende Trägergerade auszuwählen. Seitensymmetralen können mit Hilfe des Werkzeugs ‚*Streckensymmetrale*‘ konstruiert werden, dafür müssen die beiden Eckpunkte angeklickt werden, für deren Verbindungsstrecke eine Streckensymmetrale erzeugt werden soll. Um die für die Schwerlinien notwendigen Halbierungspunkte dieser Verbindungsstrecken zu erhalten, schneidet man mittels des Werkzeugs ‚*Schneide*‘ die jeweilige Seitenlinie mit der zugehörigen Streckensymmetrale. Für

die Schwerlinien müssen nur noch Geraden durch diese Halbierungspunkte und jeweils die gegenüberliegenden Eckpunkte gelegt werden. Zur Erzeugung der Winkelsymmetralen wählt man mit Hilfe des Werkzeugs ‚*Winkelsymmetrale*‘ am einfachsten jeweils die beiden Trägergeraden, die den jeweiligen Winkel einschließen, aus.

Um die fehlende Koordinate eines Punktes P auf der Geraden g zu rechnerisch zu bestimmen, kann man eine Liste von Gleichungen, nämlich koordinatenweise, aufstellen und mittels des Befehls ‚*Löse[< Liste von Gleichungen >, < Liste von Variablen >]*‘ die fehlende Koordinate berechnen lassen. Graphisch könnte man eine auf die x-Achse senkrechte Gerade, falls die fehlende y-Koordinate berechnet werden soll, oder eine auf y-Achse senkrechte Gerade, falls die fehlende x-Koordinate berechnet werden soll, aufstellen und diese mit der gegebenen Gerade schneiden.

Ein weiteres immer wieder in Schulbüchern und BIFIE-Aufgabenpools auftauchendes Übungsbeispiel erfordert das Bestimmen einer Geraden, die zu einer gegebenen Geraden parallel ist oder auf diese normal steht. Für die Lösung des ersteren Problems bietet GeoGebra zwei Möglichkeiten. Entweder man verwendet in der Eingabezeile der Graphik-Ansicht den Befehl ‚*Gerade[< Punkt >, < Parallele Gerade >]*‘ oder im Graphik-Fenster selbst das Werkzeug ‚*Parallele Gerade*‘, wobei man nur den Punkt, durch die die neue Gerade gehen soll, und die Gerade, zu der die neue Gerade parallel sein soll, auswählen muss.

Um mit dem TI-Nspire eine Gerade in Parameterform in der Graphik-Ansicht zu zeichnen, muss im Menü ‚Graph-Eingabe/Bearbeitung‘ – ‚Parametrisch‘ ausgewählt werden. Nun kann die Gerade koordinatenweise eingegeben werden. Für die Gerade $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix}$ sieht die Eingabe also folgendermaßen aus:

$$\begin{cases} x1(t) = p_1 + t \cdot g_1 \\ y1(t) = p_2 + t \cdot g_2 \\ 0 \leq t \leq 6.28 \text{ tstep} = 0.13 \end{cases}$$

Es empfiehlt sich dabei vor allem das Intervall um den Parameter t zu erweitern, da ansonsten eine eher kurze Strecke dargestellt wird. Gibt man im CAS des TI-Nspire mittels eckiger Klammern die Gerade folgendermaßen ein $[x \ y] = [p_1 \ p_2] + t \cdot [g_1 \ g_2]$ oder mittels Matrizen in der Spaltenschreibweise ein, so erhält man die Gleichungen $x = p_1 + t \cdot g_1$ und $y = p_2 + t \cdot g_2$. Diese können nun in die Graphik-Ansicht übertragen werden, um dort diese Gerade zu erzeugen. Freiler et al. (2015: 246) empfehlen allerdings Geraden durch einen bereits definierten Punkt a und den bereits definierten Richtungsvektor v so anzugeben: $x(t) := a + t \cdot v$. Wie Geraden in der Graphik-Ansicht gezeichnet werden können, wird in

Freiler et al. (2015) allerdings nicht angeführt. Es ist jedoch möglich nach Bestimmung eines Vektors, der durch einen fixen Anfangs- und Endpunkt festgelegt wird, eine Gerade zu erzeugen, die in Richtung dieses Vektors zeigt und durch den hier ausgewählten Anfangs- und Endpunkt geht.

Aufgaben zu lösen, die die Berechnung einer fehlenden Koordinate eines Punktes auf einer vorgegebenen Gerade erfordern, ist mit dem TI-Nspire etwas unkomplizierter. Für einen Punkt der Form $P = (x|y)$, in Aufgabe 995a) (Freiler et al. 2015: 249) beispielsweise durch $P = (-3|r)$ gegeben, und die Gerade der Form $g: X = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix}$, in Aufgabe 995a) durch $g: X = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ gegeben, benötigt man im CAS des TI-Nspire den Befehl `,solve([2,-1] + t · [1,-1] = [-3,r],r)‘` und erhält $r = 4$ and $t = -5$.

Im Hinblick auf die Normalvektorform der Geradengleichung ist zu betonen, dass die Möglichkeiten in GeoGebra ähnlich zu jenen Funktionen für die Parameterform der Geradengleichung sind. Die Normalvektorform kann in ihrer nicht ausmultiplizierten Form $\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$ für $\vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix}$ Normalvektor, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ beliebiger Punkt und $P = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$ vorgegebener Punkt auf der Geraden in die Eingabezeile der Graphik-Ansicht eingegeben werden. GeoGebra zeichnet diese dann und multipliziert die Gleichung auf beiden Seiten aus. Wie bereits in diesem Abschnitt erwähnt, kann zwischen den Darstellungsformen nun mittels Rechtsklick und angemessener Auswahl gewechselt werden. Um mittels GeoGebra die Normalvektorform für SchülerInnen zu veranschaulichen, kann man folgende Zeichnung konstruieren. Zuerst definiert man in der Eingabezeile des Graphik-Fensters die Gerade g . Nun zeichnet man zwei auf der Geraden g liegende Punkte A und B . Mit dem Werkzeug *‚Winkel mit fester Größe‘* bestimmt man nun einen Winkel von 90° . Nun verbindet man mit dem Werkzeug *‚Vektor‘* jenen Punkt, angenommen es sei in diesem Fall der Punkt A , auf der Geraden g mit dem erzeugten Punkt, sodass dieser Vektor normal auf die Gerade g steht. Nun lässt sich der Punkt A beliebig auf der Geraden verschieben und das Konzept der Normalvektorform einer Geraden kann veranschaulicht und erklärt werden. Erzeugt man die Gerade g von Beginn an mit zwei Punkten, die man dann auch für die Festlegung des rechten Winkels wählt, so kann der Zusammenhang der Veränderung des Normalvektors mit der Veränderung der Geraden gezeigt werden.

Beim TI-Nspire lassen sich in der Normalvektorform angegebene Geraden nur in ausmultiplizierter Form, also in der allgemeinen Form, angeben und zeichnen. Dafür muss im Menü unter *‚Graph – Eingabe/Bearbeitung‘* → *‚Gleichung‘* → *‚Gerade‘* →

„Linienstandard“ $a \cdot x + b \cdot y = c$ ausgewählt werden. Um Geraden in der Normalvektorform im CAS einzugeben und diese anschließend zu verwenden, kann diese in ausmultiplizierter Form einfach eingegeben werden. Falls davor mit Geraden in der Parameterdarstellung gearbeitet worden ist und eine Gerade beispielsweise, wie in Freiler et al. (2015: 246) angegeben, mit $x(t)$ definiert worden ist, muss darauf geachtet werden, diese Definitionen zu löschen oder umzubenennen, da ansonsten eine Eingabe der Art $a \cdot x + b \cdot y = c$ mit $a, b, c \in \mathbb{R}$ zu einem „Argumentfehler“ führen würde. In Normalvektorform angegebene Geraden können laut Freiler et al. (2015: 258) mittels des Befehls „sto →“ zum Beispiel als „ $g(x)$ “ definiert werden, um im folgenden schneller auf diese zurückgreifen zu können.

Bezüglich Lagebeziehungen zweier Geraden im $\mathbb{R}^2$ arbeitet man in GeoGebra mit dem Werkzeug „Schneide“. Angenommen zwei Geraden g und h sind bereits definiert und in der Graphik-Ansicht eingezeichnet worden. Durch Auswahl dieses Werkzeugs und der Geraden g und h wird direkt der Schnittpunkt berechnet. Falls die beiden Geraden einander tatsächlich schneiden, so erhält man einen Schnittpunkt. Sind die Geraden aber parallel oder ident, so zeigt GeoGebra im Algebra-Fenster ein Fragezeichen an. Da im Falle der Identität die beiden Gleichungen ein Vielfaches voneinander sein müssen und GeoGebra Gleichungen dieser Art nach der Eingabe so weit wie möglich vereinfacht, kann man im Algebra-Fenster direkt sehen, ob diese beiden Geraden durch dieselbe Gleichung dargestellt werden und ident sind oder ob sie parallel sind. Mit dem Werkzeug „Winkel“ kann ebenso der Winkel zwischen den Geraden g und h festgestellt werden, wobei darauf geachtet werden muss, dass GeoGebra unter Umständen einen Winkel zwischen 90° und 180° angibt, in so einem Fall sollte der Supplementärwinkel berechnet und angegeben werden.

Um die Lage zweier Geraden im $\mathbb{R}^2$ zueinander zu bestimmen, wird auch im CAS des TI-Nspire einfach der Schnittpunkt bestimmt. Sind die Geraden in Parameterform angegeben und als $g(t)$ und $h(s)$ definiert, so ist der Befehl „ $solve(g(t) = h(s), t)$ “ zu verwenden. Man erhält die entsprechenden Werte für t und s und setzt diese jeweils in g und h ein. Erhält man keine expliziten Werte für t und s , sondern das Ergebnis „*true*“ oder „*false*“, so bedeutet ersteres Ergebnis, dass die beiden Geraden ident sind, da sie unendlich viele gemeinsame Punkte haben und zweiteres Ergebnis, dass die beiden Geraden parallel sind, weil sie keinen gemeinsamen Schnittpunkt haben (Freiler et al. 2015: 254).

Falls die beiden Geraden in der Normalvektorform angegeben sind, ist ebenfalls der „*solve*“-Befehl zu verwenden (Freiler et al. 2015: 258). Dabei kann man entweder die beiden

Geraden vorher durch $g(x)$ und $h(x)$ definieren und anschließend *„solve($g(x)$ and $h(x)$), x)“* eingeben oder für die Geraden $a \cdot x + b \cdot y = c$ und $d \cdot x + e \cdot y = f$ direkt den Befehl *„solve($a \cdot x + b \cdot y = c$ and $d \cdot x + e \cdot y = f$), x)“* verwenden. In beiden Fällen erhält man für x und y Werte, die die Koordinaten des Schnittpunkts darstellen. Sind die beiden Geraden parallel, so ergibt dieser Befehl *„false“*. Aber wenn die beiden Geraden ident sind, so erhält man diese Gerade in möglichst einfacher und gekürzter Form, wobei diese nicht in der expliziten oder impliziten Form angegeben wird, sondern durch *„ $x =$ “*, da obiger Befehl die Lösung nach der Variablen x verlangt.

Für die Bestimmung der Lagebeziehung zweier Geraden in der Ebene mittels der Graphik-Ansicht des TI-Nspire sind in Freiler et al. (2015) keine Anweisungen zu finden. Man kann zwar Geraden, wie in ebendiesem Abschnitt bereits beschrieben, parametrisch einzeichnen, mittels der Funktion *„Schnittpunkt(e)“* kann man zwei eingezeichnete parametrische Graphen aber nicht auswählen. Für Geraden, die in der allgemeinen Form angegeben und im Graphik-Fenster eingezeichnet werden, funktioniert das Werkzeug *„Schnittpunkt(e)“*, welches im Menü unter *„Geometry“* $\rightarrow$ *„Punkte & Geraden“* zu finden ist. Dabei ist jedoch anzumerken, dass die Graphik-Ansicht des TI-Nspire in so einem Fall eher unübersichtlich ist, da die Beschreibungen der Geraden einander und die Koordinaten des Schnittpunkts dabei ebenso überlappen und diesen damit schwer zu lesen machen.

6.5 Normalvektoren im $\mathbb{R}^2$ – AG 3.5

In GeoGebra kann ein Normalvektor mittels des Befehls *„Normalvektor[< Gerade >]“* auf eine vorgegebene Gerade, mittels des Befehls *„Normalvektor[< Strecke >]“* auf eine vorgegebene Strecke, mittels des Befehls *„Normalvektor[< Vektor >]“* auf einen vorgegebenen Vektor und mittels des Befehls *„Normalvektor[< Ebene >]“* auf eine vorgegebene Ebene aufgestellt werden. Langensteiner et al. (2014: 79) betonen hierbei, dass durch den Befehl *„Normalvektor[< Vektor >]“* ein Vektor mit gleicher Länge wie der ursprüngliche Vektor erzeugt wird, der um 90° gegen den Uhrzeigersinn gekippt ist. Um den im Uhrzeigersinn gekippten Normalvektor zu erhalten, kann man den Gegenvektor zu obigem Normalvektor erzeugen. Des Weiteren schlagen Langensteiner et al. (2014: 79) vor, den Befehl *„Vektor[P , $P + \text{Normalvektor}[u]$]“* zu verwenden, wenn der auf u normal stehende Vektor vom Punkt P ausgehen soll. Alternativ kann man auch mit dem Werkzeug *„Winkel mit fester Größe“* arbeiten, indem man dabei den rechten Winkel festsetzt. Dabei kann man explizit wählen, ob man im oder gegen den Uhrzeigersinn arbeiten möchte.

Beim TI-Nspire ist eine ähnlich einfache Funktion derzeit noch nicht möglich. Man kann aber selbst mittels der Eingabe $nv(a) := \begin{bmatrix} a_{[2,1]} \\ -a_{[1,1]} \end{bmatrix}$ definieren, wie ein Normalvektor zu einem gegebenem Vektor a berechnet werden soll, wobei durch diese Eingabe nur der nach rechts gekippte Normalvektor erzeugt werden kann.

7 Zusammenfassung und Ausblick

Es zeigt sich, dass sich die Vektorrechnung als Stoffgebiet in den österreichischen allgemeinbildenden höheren Schulen im Laufe der Zeit seit ihrer Einführung in der zweiten Hälfte des 20. Jahrhunderts stark verändert und in vielerlei Hinsicht weiterentwickelt hat. Schon in den Anfängen der Vektorrechnung im 16. und 17. Jahrhundert betonen Naturwissenschaftler wie Leibniz, dass einzelne Zahlen für die Beschreibung vieler Phänomene nicht ausreichen würden (Malle 1998: 112-113). Dieser Gedanke dient auch als grundlegende Motivation für die Vektorrechnung in heutigen Schulbüchern, besonders in *Mathematik verstehen 5* von Malle et al. (2010a) und *Lösungswege Mathematik Oberstufe 5* von Freiler et al. (2015). Ein kurzer geschichtlicher Überblick über die Entstehung und Entwicklung der Vektorrechnung hat gezeigt, dass diese vor allem im Zusammenhang mit der Physik betrachtet werden muss. Verschiedene Konzepte wie Hamiltons Quaternionentheorie und Graßmanns Ausdehnungslehre haben unter anderem zur Entstehung der modernen Vektorrechnung beigetragen. Des Weiteren sind Gibbs, Heaviside und Peano als wichtige Personen zu nennen, deren Arbeiten auch heute noch bedeutend für die Vektorrechnung sind (Malle 1998: 121). Aus den verschiedenen Motivationen und Ansätzen, die unterschiedliche Theorien und Konzepte hinsichtlich der Vektorrechnung ergeben haben, resultieren nun diverse inhaltliche Vorstellungen von Vektoren, wobei sowohl geometrische, als auch algebraische Interpretationen und Deutungen von Vektoren in der Schule möglich und von Bedeutung sind (Hartmann 1993: 49).

Im Lehrplan von 1967 (LP 1967) findet die Vektorrechnung ihren Eingang in die Schule und ist seitdem ein beständiger Teil des Lehrplans. Bis zum derzeit gültigen Lehrplan von 2004 (LP 2004) hat es viele Veränderungen gegeben. Einige Aspekte dieses Stoffgebiets, die in früheren Lehrplänen immer wieder anzufinden sind, wie beispielsweise der Begriff des linearen Vektorraums und Beweise in der Vektorrechnung, sind im aktuellen Lehrplan und auch in den Grundkompetenzen für die standardisierte schriftliche Reifeprüfung in Mathematik nicht mehr enthalten. Andere Inhalte, wie zum Beispiel die Veranschaulichung der Rechenoperationen, Einheitsvektoren und die Übertragbarkeit von Wissen über Vektoren in der Ebene auf Vektoren im Raum und deren Grenzen, sind in früheren Lehrplänen nur wenig beziehungsweise teilweise gar nicht vertreten, aber gewinnen im Laufe der Zeit immer mehr an Bedeutung und gehören zu den Grundsteinen der Vektorrechnung im heutigen Unterricht der österreichischen AHS. Der Vergleich des Lehrplans von 2004 mit den Grundkompetenzen der standardisierte Reifeprüfung zeigt, dass durch Behandlung der Grundkompetenzen tatsächlich nur grundlegende Vektorrechnung, hauptsächlich in der Ebene, betrieben werden kann. Obwohl der Fokus dieser

Arbeit schlussendlich vor allem auf den für die schriftliche Reifeprüfung relevanten Grundkompetenzen liegt, müssen sich Lehrer und Lehrerinnen auch der Bedeutung der im Lehrplan verankerten Stoffgebiete sowie darüber hinaus gehende Inhalte bewusst sein.

In Anlehnung an die in Kapitel 2.3 aufgeworfene Frage, was denn nun ein Vektor sei, sind verschiedene in Schulbüchern vertretene Modelle beleuchtet worden. Offenbar ist dabei das algebraische Modell der Vektoren als n -Tupel und deren geometrische Deutung jenes Modell, welches in den heute gängigen Schulbüchern am häufigsten zu finden ist. Insbesondere Malle et al. (2010a) und Freiler et al. (2015) widmen dem algebraischen Modell der n -Tupel ein eigenes Kapitel, bevor dezidiert die geometrische **Deutung beziehungsweise Interpretation** der Vektoren betrachtet wird. Das Pfeilklassenmodell ist ebenfalls in vielen Schulbüchern anzutreffen, insbesondere aber in älteren Schulbüchern von Laub et al. (1967 & 1978) und Thorwartl, Wagner & Wagner (1991). Aber auch neuere Schulbücher wie *Klar² Mathematik 5* von Binder, Denninger & Urban-Woldron (2010) und *Dimensionen Mathematik 5* von Bleier et al. (2014), wobei letzteres nicht nur das Pfeilklassenmodell vorstellt. Des Weiteren gibt es das Modell der Ortsvektoren, welches zwar von Laub et al. (1978) und Reichel et al. (2002) verwendet wird, aber in keinem von beiden Büchern als alleiniges Modell benutzt, sondern durch andere Modelle ergänzt wird. Außerdem ist in dieser Arbeit auch das Translationsmodell betrachtet worden, welches immerhin in älteren Schulbüchern, wie Laub et al. (1967 & 1978) verwendet worden ist, im heutigen Unterricht aber kaum noch beleuchtet wird. Schlussendlich wurde, auf Grund der großen Bedeutung und häufigsten Anwendung heutzutage, das Modell der n -Tupel und deren geometrischen Deutung im Detail diskutiert.

Die detaillierte Schulbuchanalyse in Abschnitt 5 zeigt, dass trotz der Vorgaben durch den Lehrplan und die Grundkompetenzliste des BIFIE Gestaltungsmöglichkeiten durch den Lehrer oder die Lehrerin bestehen. Die fünf näher beleuchteten Schulbücher beinhalten teilweise sehr verschiedene Ansätze, legen auf unterschiedliche Inhalte mehr oder weniger Wert und inkludieren andere (Muster-)Beispiele und Erklärungen. Trotzdem erfüllen sie alle, großteils, die Anforderungen des Lehrplans und damit auch jene der Grundkompetenzen. Dabei sei jedoch hervorgehoben, dass das Schulbuch *Klar² Mathematik 5* von Binder, Denninger & Urban-Woldron (2010) das einzige ist, welches einen der bedeutsamsten Aspekte der Vektorrechnung, nämlich den algebraischen, gar nicht behandelt. Dies bezeugt, dass die Schulbücher zwar eine wichtige Rolle für den Unterricht erfüllen und in vielerlei Hinsicht als Grundlage für die Struktur des Unterrichts dienen können, aber trotzdem im Hinblick auf die Anforderungen des Lehrplans kritisch betrachtet werden müssen.

Eine der bisher größten Veränderungen des Unterrichts in der Schule ist durch die Entwicklung und Verwendung neuer Technologien, wie GeoGebra und der TI-Nspire entstanden. Das BIFIE (2015c: 4-5) beschreibt einen neuen Fokus auf die Reflexion von Ergebnissen und Planung zum Problem lösen mit Hilfe der elektronischen Hilfsmittel anstatt der bisherigen Konzentration auf das Operieren. Offensichtlich hat sich die Aufgabenkultur auf Grund des Einsatzes neuer Technologien bereits verändert, hinsichtlich der Typ 1 Aufgaben beispielsweise, die das Verständnis bestimmter Sachverhalte erfordern und nicht das sture Ausführen eines auswendig gelernten Schemas. Diese Veränderungen werden aber in Anbetracht der Einführung der verpflichtenden Verwendung von höheren Technologien noch gravierender.

Die Vektorrechnung in der österreichischen AHS hat sich also in den letzten 50 Jahren beträchtlich verändert und wird das in Zukunft auch weiterhin tun; inwiefern, wann und wie stark, das ist jetzt noch nicht abzusehen. Daher ist es essenziell für Lehrer und Lehrerinnen zu versuchen immer am neuesten Stand zu bleiben, denn die Mathematik ist, im Gegensatz zum allgemeinen Glauben, keine stillstehende, sich nicht verändernde Wissenschaft.

8 Bibliographie

8.1 Literatur

- BIFIE. Bundesinstitut für Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens. 2013. „Die standardisierte schriftliche Reifeprüfung in Mathematik. Inhaltliche und organisatorische Grundlagen zur Sicherung mathematischer Grundkompetenzen (Stand: März 2013)“.
https://www.bifie.at/system/files/dl/srdp_ma_konzept_2013-03-11.pdf (9. Juni 2016).
- BIFIE. Bundesinstitut für Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens. 2014. „Übungsaufgaben zur Vorbereitung auf die standardisierte kompetenzorientierte schriftliche Reifeprüfung in Mathematik (AHS)“.
https://www.bifie.at/system/files/dl/srdp_ma_uebungsaufgaben_gesamt_2014-11-21.pdf (5. März 2016).
- BIFIE. Bundesinstitut für Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens. 2015a. „Standardisierte kompetenzorientierte schriftliche Reifeprüfung. AHS. 11. Mai 2015. Haupttermin. Mathematik. Teil-1-Aufgaben“.
https://www.bifie.at/system/files/dl/KL15_PT1_AHS_MAT_T1_CC_AU_0.pdf (5. Mai 2016).
- BIFIE. Bundesinstitut für Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens. 2015b. „Standardisierte kompetenzorientierte schriftliche Reifeprüfung. AHS. 21. September 2015. 1. Nebentermin. Mathematik. Teil-1-Aufgaben“.
https://www.bifie.at/system/files/dl/KL15_PT2_AHS_MAT_T1_CC_AU.pdf (17. Mai 2016).
- BIFIE. Bundesinstitut für Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens. 2015c. „Die standardisierte schriftliche Reifeprüfung in Mathematik. Inhaltliche und organisatorische Grundlagen zur Sicherung mathematischer Grundkompetenzen – gültig für alle SchülerInnen, die ab dem Haupttermin 2018 maturieren (Stand: Oktober 2015)“.
https://www.bifie.at/system/files/dl/srdp_ma_konzept_neuauflage_2018_2015-10-19.pdf (9. Juni 2016).
- BIFIE. Bundesinstitut für Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens. 2016a. „Standardisierte kompetenzorientierte schriftliche Reifeprüfung. AHS. 15. Jänner 2016. 2. Nebentermin. Mathematik. Teil-1-Aufgaben“.
https://www.bifie.at/system/files/dl/KL15_PT2_AHS_MAT_T1_CC_AU.pdf (17. Mai 2016).
- BIFIE. Bundesinstitut für Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens. 2016b. „Standardisierte kompetenzorientierte schriftliche Reifeprüfung. AHS. 10. Mai 2016. Mathematik. Teil-1-Aufgaben“.
https://www.bifie.at/system/files/dl/KL16_PT1_AHS_MAT_T1_CC_AU.pdf (19. Mai 2016).
- Bürger, Heinrich; Fischer, Roland; Malle, Günther; Reichel, Hans-Christian. 1980. „Zur Einführung des Vektorbegriffes. Arithmetische Vektoren mit geometrischer Deutung“. *Journal für Mathematik-Didaktik* 1(3), 171-187.
- Bleier, Gabriele; Lindenberg, Judith; Lindner, Andreas; Süß-Stepancik, Evelyn. 2014. *Dimensionen Mathematik 5*. Wien: Verlag E. DORNER GmbH.

- Grosser, Siegfried. 1982. „Wichtige Aspekte des Vektorbegriffs“. *Schriftenreihe zur Didaktik der Mathematik der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft (ÖMG)* 9(5), 61-70.
- Hartmann, Karin. 1993. „Inhaltliche Vorstellungen von Vektoren. Eine mathematikdidaktische Untersuchung“. Diplomarbeit, Formal- und Naturwissenschaftliche Fakultät, Universität Wien.
- Jarmer, Monika. 1995. „Empirische Untersuchungen zur Vektorrechnung in der Schule“. Diplomarbeit, Formal- und Naturwissenschaftliche Fakultät, Universität Wien.
- Liebscher, Marlies; Breyer, Gustav; Fürst, Sieglinde; Heugl, Helmut; Kraker, Michaela; Preis, Christa; Svecnik, Erich; Liegl, Ilse; Plattner, Gerhard. 2013. *Praxishandbuch Mathematik AHS Oberstufe. Auf dem Weg zur standardisierten kompetenzorientierten Reifeprüfung. Teil 1*. (2. aktualisierte Auflage). Wien: Bundesinstitut für Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens.
- Mäder, Peter. 1992. *Mathematik hat Geschichte*. Hannover: Metzler Schulbuchverlag.
- Malle, Günther. 1998. „Was ist ein Vektor? Antworten aus der Geschichte der Mathematik“. *Schriftenreihe zur Didaktik der Mathematik der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft (ÖMG)* 29(8), 112-123.
- Malle, Günther. 2005a. „Von Koordinaten zu Vektoren“. In *Mathematik Lehren* 133, Koordinaten und Vektoren, 4-7.
- Malle, Günther. 2005b. „Neue Wege in der Vektorgeometrie“. In *Mathematik Lehren* 133, Koordinaten und Vektoren, 8-15.
- Malle, Günther. 2005c. „Schwierigkeiten mit Vektoren“. In *Mathematik Lehren* 133, Koordinaten und Vektoren, 16-19.
- Malle, Günther. 2007. „Ein didaktisch orientiertes Vektorkonzept“. *Schriftenreihe zur Didaktik der Mathematik der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft (ÖMG)* 40(7), 80-90.
- Redelsteiner, Heidi. 2011. „Die Entwicklung der Vektorrechnung in der Oberstufe von der Schulreform 1967 bis zur Zentralmatura“. Diplomarbeit, Fakultät für Mathematik, Universität Wien.
- Schwendenwein, Werner. 2000. *Theorie des Unterrichtens und Prüfens*. (7. Auflage). Wien: WUV Universitätsverlag.
- Wittmann, Gerald. 2003. *Schülerkonzepte zur analytischen Geometrie: mathematikhistorische, epistemologische und empirische Untersuchungen*. Hildesheim: Franzbecker.

8.2 Lehrpläne

- Lehrplan 1967: Bundesministerium für Unterricht und Kunst. 1967. „Bundesgesetzblatt für die Republik Österreich. 295. Verordnung“. https://www.ris.bka.gv.at/Dokumente/BgblPdf/1967_295_0/1967_295_0.pdf (5. März 2016).
- Lehrplan 1978: Bundesministerium für Unterricht und Kunst. 1978. „Bundesgesetzblatt für die Republik Österreich. 114. Verordnung“. https://www.ris.bka.gv.at/Dokumente/BgblPdf/1978_114_0/1978_114_0.pdf (5. März 2016).

- Lehrplan 1989: Bundesministerium für Bildung und Frauen. 1989. „Bundesgesetzblatt für die Republik Österreich. 63. Verordnung“. https://www.ris.bka.gv.at/Dokumente/BgblPdf/1989_63_0/1989_63_0.pdf (9. März 2016).
- Lehrplan 2004: Bundesministerium für Bildung und Frauen. 2004. „Lehrplan der AHS Oberstufe. Mathematik“. https://www.bmbf.gv.at/schulen/unterricht/lp/lp_neu_ahs_07_11859.pdf?4dzgm2 (5. März 2016).

8.3 Schulbücher

- Ableitinger, Christoph; Dorner, Christian; Embacher, Franz; Ulovec, Andreas; Malle, Günther. 2014. *Mathematik verstehen 5. Technologietraining*. Wien: Österreichischer Bundesverlag Schulbuch GmbH & Co. KG.
- Binder, Gertrude; Denninger, Franz; Urban-Woldron, Hildegard. 2010. *Klar² Mathematik 5*. Wien: Verlag Jugend & Volk GmbH.
- Bleier, Gabriele; Lindenberg, Judith; Lindner, Andreas; Süß-Stepancik, Evelyn. 2014. *Dimensionen Mathematik 5*. Wien: Verlag E. DORNER GmbH.
- Bleier, Gabriele; Lindenberg, Judith; Lindner, Andreas; Süß-Stepancik, Evelyn. 2015. *Dimensionen Mathematik 6*. Wien: Verlag E. DORNER GmbH.
- Brand, Clemens; Dorfmayr, Anita; Lechner, Josef; Mistlbacher, August; Nussbaumer, Alfred. 2009. *Thema Mathematik für die 5. Klasse AHS*. Linz: Veritas-Verlag.
- Brand, Clemens; Dorfmayr, Anita; Lechner, Josef; Mistlbacher, August; Nussbaumer, Alfred. 2010. *Thema Mathematik für die 6. Klasse AHS*. Linz: Veritas-Verlag.
- Bürger, Heinrich; Fischer, Roland; Cejnek, Eduard; Kraft, Johann A.; Malle, Günther; Mühlgassner, Thomas. 1978. *Mathematik Oberstufe 1. Arbeitsbuch mit Lösungen für die 5. Klasse der AHS*. Wien: Hölder-Pichler-Tempsky.
- Dorfmayr, Anita; Brand, Clemens; Lechner, Josef; Mistlbacher, August; Nussbaumer, Alfred. 2011. *Thema Mathematik. Mathematik mit GeoGebra. Themenheft*. 2. Auflage. Linz: Veritas-Verlag.
- Freiler, Philipp; Marsik, Julia; Olf, Markus; Schmid-Zartner, Rainer; Wittberger, Markus. 2015. *Lösungswege Mathematik Oberstufe 5*. Wien: Österreichischer Bundesverlag Schulbuch GmbH & Co. KG.
- Langensteiner, Bernd; Müllner, Theresia; Plotz, Thomas; Riedler, Barbara; Urban-Woldron, Hildegard; Weigl, Franz. 2011. *Klar² Mathematik 6*. Wien: Verlag Jugend & Volk GmbH.
- Laub, Josef; Hruby, Eugen; Körperth, Wilhelm; Kranzer, Walter; Vohla, Herbert; Alexander, Johann; Lewisch, Ingrid. 1967. *Lehrbuch der Mathematik für die Oberstufe der allgemeinbildenden höheren Schulen. 1. Teil für die 5. Klasse (zweites Heft)*. Wien: Hölder-Pichler-Tempsky.
- Laub, Josef; Hruby, Eugen; Körperth, Wilhelm; Schweiger, Fritz; Kopp, Günther. 1978. *Lehrbuch der Mathematik für die Oberstufe der allgemeinbildenden höheren Schulen. 1. Band. Arbeitsbuch für die 5. Klasse*. Wien: Hölder-Pichler-Tempsky.
- Malle, Günther; Koth, Maria; Woschitz, Helge; Malle, Sonja; Salzger, Bernhard; Ulovec, Andreas; Ramharter, Esther; Kandl, Susanne. 2010a. *Mathematik verstehen 5*. Wien: Österreichischer Bundesverlag Schulbuch GmbH & Co. KG.

- Malle, Günther; Koth, Maria; Woschitz, Helge; Malle, Sonja; Salzger, Bernhard; Ulovec, Andreas; Ramharter, Esther; Kandl, Susanne. 2010b. *Mathematik verstehen 6*. Wien: Österreichischer Bundesverlag Schulbuch GmbH & Co. KG.
- Reichel, Hans-Christian; Müller, Robert; Bernhard, Martin; Groß, Herbert; Hederer, Otto; Hanisch, Günter; Wenzel, Claudia. 2002. *Lehrbuch der Mathematik. 5. Klasse*. Wien: öbv & hpt Verlagsgesellschaft mbH & Co. KG.
- Thorwartl, Wolfram; Wagner, Günther; Wagner, Helga. 1991. *Mathematik positiv. 5. Klasse AHS. Band 1: Musterbeispiele und Aufgaben*. Wien: Österreichischer Bundesverlag Gesellschaft m.b.H.

9 Abbildungsverzeichnis

Abbildung 1: Grundkompetenzen – Vektorrechnung (Liebscher et al. 2013: 9)	20
Abbildung 2: Parameterdarstellung der Gerade	28
Abbildung 3: Herleitung des Schwerpunkts – ein Vergleich (Malle 2007: 88)	29
Abbildung 4: Vektoraddition als Punkt-Pfeil-Darstellung (Malle 2007: 86)	35
Abbildung 5: Vektoraddition als Pfeil-Pfeil-Darstellung (Malle 2007: 86)	35
Abbildung 6: Geometrische Darstellungen der Addition zweier reeller Zahlen (Malle 2007: 86)	36
Abbildung 7: Alexandras, Sandras und Nataschas Lösungsversuche (Malle 2005c: 17)	39
Abbildung 8: Ein Zahlenpaar durch verschiedene Pfeile in der Ebene dargestellt (Malle et al. 2010a: 217)	47
Abbildung 9: Aufgabe 821a) in Dimensionen Mathematik 5 (Bleier et al. 2014: 270)	48
Abbildung 10: BIFIE Aufgabe zu Kräften (BIFIE 2014: 45)	54
Abbildung 11: BIFIE Aufgabe zum Rechnen mit Vektoren (BIFIE 2014: 49)	56
Abbildung 12: Aufgabe der standardisierten Reifeprüfung vom 10. Mai 2016 (BIFIE 2016b: 9)	57
Abbildung 13: BIFIE Aufgabe zu Rechenoperationen bei Vektoren (BIFIE 2014: 57)	63
Abbildung 14: BIFIE Aufgabe zu Vektoren in einem Quader (BIFIE 2014: 51)	64
Abbildung 15: BIFIE Aufgabe zum Quadrat (BIFIE 2014: 53)	68
Abbildung 16: BIFIE Aufgabe zu Vektoren im Dreieck (BIFIE 2014: 47)	71
Abbildung 17: Aufgabe der standardisierten Reifeprüfung vom 11. Mai 2015 (BIFIE 2015a: 7)	73
Abbildung 18: BIFIE Aufgabe zum Rechteck (BIFIE 2014: 59)	74
Abbildung 19: BIFIE Aufgabe zur Gerade in Parameterform (BIFIE 2014: 67)	77
Abbildung 20: Parameterdarstellung einer Geraden – die Einführung in Freiler et al. (2015: 246)	81
Abbildung 21: BIFIE Aufgabe zu Geraden im $\mathbb{R}^3$ (BIFIE 2014: 69)	83
Abbildung 22: Aufgabe der standardisierten Reifeprüfung vom 11. Mai 2015 (BIFIE 2015a: 8)	84
Abbildung 23: Die Normalvektordarstellung – die Einführung in Freiler et al. (2015: 255) ..	90
Abbildung 24: Aufgabe der standardisierten Reifeprüfung vom 15. Jänner 2016 (BIFIE 2016a: 9)	92
Abbildung 25: Aufgabe der standardisierten Reifeprüfung vom 21. September 2015 (BIFIE 2015b: 8)	99

Abbildung 26: Aufgabe der standardisierten Reifeprüfung vom 11. Mai 2015 (BIFIE 2015a: 9)	102
Abbildung 27: Aufgabe der standardisierten Reifeprüfung vom 21. September 2015 (BIFIE 2015b: 9)	103
Abbildung 28: Aufgabe der standardisierten Reifeprüfung vom 15. Jänner 2016 (BIFIE 2016a: 8)	105
Abbildung 29: Die Pfeil-Pfeil-Addition in GeoGebra	112